Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2014, № 16 (2). — С. 25–38.

Про нові фрактальні феномени, пов'язані з розподілами випадкових величин з незалежними GLS-символами

М. Л. Лупаїн, Г. М. Торбін
(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова)

Анотація. Робота присвячена дослідженню фрактальних властивостей ймовірнісних мір з незалежними GLS-символами. Продемонстровано нові фрактальні феномени, які відсутні у розподілів випадкових величин з незалежними символами розкладів Люрота, $Q_\infty-$розкладів, $I-Q_\infty-$розкладів, але природнім чином виникають у розподілів випадкових величин з незалежними навіть однаково розподіленими GLS-символами.

У роботі досліджено фрактальну масивність множин Δ_∞^{GLS}, побудовано приклад розподілу випадкової величини з незележними однаково розподіленими GLS-символами

$$\xi = \Delta^{GLS}_{\xi_1\xi_2\xi_3\ldots\xi_k\ldots},$$

для якого рівняння $\sum\limits_{i:P\{\xi_k=i\}>0} q_i^x = 1$ має корінь, але цей корінь не співпадає з розмірністю Хаусдорфа-Безиковвича спектра S_ξ розподілу випадкової величини ξ.

У роботі доведено формулу обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича спектра розподілу випадкової величини з незалежними однаково розподіленими GLS-символами при довільних стохастичних векторах Q_∞ і P_∞ (незалежно від скінченності/нескінченності їх ентропії та довірчості/недовірчості для обчислеення розмірності Хаусдопфа-Безиковича сімейства циліндрів відповідного GLS-розкладу) та довільного взаємного розташування циліндрів GLS-розкладу в циліндрах попереднього рангу.

Ключові слова: GLS-зображення, розмірність Хаусдорфа-Безиковича, фрактали, сингулярні ймовірнісні міри, спектр.

Abstract. The paper is devoted to the study of fractal properties of probability measures with independent GLS-symbols. We demonstrate new fractal phenomena which are impossible for distributions of random variables with independent symbols of Lüroth expansion, $Q_\infty-$expansions, $I-Q_\infty-$expansions, but they appeared rather naturally for distributions of random variables with independent and even *identicallty distributed* GLS-symbols.

Abstract. Fractal massivity of sets $\Delta^{GL\S}_{infty}$ are studied in details. We also construct an example of the distibution of random variables with independent identically disstributed GLS-symbols

$$\xi = \Delta^{GLS}_{\xi_1\xi_2\xi_3\ldots\xi_k\ldots},$$

such that the equation $\sum\limits_{i:P\{\xi_k=i\}>0} q_i^x = 1$ has a root on the unit interval, but this root does not coincide with the Hausdorff-Besicovitch dimension of the spectrum S_ξ of the distribution of the random variable ξ.

A general formulae for the determination of the Hausdorff-Besicovitch dimension of the spectrum S_ξ of the distribution of random variable ξ with independent identically distributed symbols are proven for arbitrary stochastic vectors Q_∞ and P_∞ (independently of finiteness resp. infiniteness of their entropies and independently of faithfulness resp. non-faithfulness for the determination of the Hausdorff-Besicovitch dimension of the family of cylinders of the corresponding GLS-expansion) and for any mutual placement of cylinders of GLS-expansion in cylinders of previous ranks.

Key words: GLS-expansion, Hausdorff-Besicovitch dimension, fractals, singular continuous measures, spectrum.

Mathematics Subject Classification (2010): 11K55, 26A30, 28A80, 60E10.

1. Вступ

Нехай

$$x = \Delta^{GLS}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots} \tag{1}$$

- GLS-розклад дійсного числа x з одиничного відрізка (для зручності читача в наступному розділі ми нагадаємо поняття GLS-розкладу та обговоримо деякі відкриті проблеми, з ним пов'язані; див. також [1, 9] для більш детального висвітлення властивостей GLS-розкладів).

Основним об'єктом даного дослідження є фрактальні властивості розподілів випадкових величин з незалежними однаково розподіленими GLS-символами, тобто розподілів випадкових величин виду

$$\xi = \Delta^{GLS}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots} \tag{2}$$

де $\{\xi_k\}$ - послідовність випадкових величин, які набувають значень $0, 1, 2, \ldots\ \ldots$ з ймовірностями $p_0, p_1, p_2, \ldots$ відповідно.

Як відомо, GLS-розклад дійсних чисел визначається нескінченним стохастичними вектором $Q_\infty = (q_0, q_1, q_2 \ldots)$, $q_i > 0$, $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q_i = 1$ та законом взаємного розташування циліндрів першого рангу на одиничному відрізку (циліндри першого рангу Δ_i^{GLS} та Δ_j^{GLS} не повинні мати внутрішніх спільних точок і $|\Delta_i^{GLS}| = q_i$).

Зауважимо, що коли $|\Delta_i^{GLS}| = \frac{1}{(i+1)(i+2)}$, $\sup \Delta_0^{GLS} = 1$ і $\inf \Delta_i^{GLS} = \sup \Delta_{i+1}^{GLS}$, то GLS-розклад співпадає з класичним розкладом Люрота.

Якщо $\inf \Delta_0^{GLS} = 0$ і $\sup \Delta_i^{GLS} = \inf \Delta_{i+1}^{GLS}$, то GLS-розклад співпадає з Q_∞-розкладом.

Позначимо через

$$\Delta_\infty^{GLS} := [0;1] \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} \Delta_i^{GLS}.$$

У тому випадку, коли множина Δ_∞^{GLS} є не більш як зчисленною, фрактальні властивості спектрів випадкових величин з незалежними однаково розподіленими GLS-символами вивчалися в роботах [1, 11], де, зокрема, доведено наступний результат.

Теорема 1. *Якщо множина Δ_∞^{GLS} не більш як зчисленна, то для довільного $GLS-$розкладу розмірність Хаусдорфа-Безиковича спектра розподілу випадкової величини ξ з незалежними однаково розподіленими GLS -символами обчислюється наступним чином.*

Нехай $V := \{i : \ \ p_i > 0\} = \{i_1, i_2, ..., i_k, ...\}$, де $i_k < i_{k+1}$; $V_k := \{i_1, i_2, ..., i_k\}$. Тоді

1) якщо рівняння $\sum\limits_{i\in V} q_i^x = 1$ має корінь α_0 на $[0,1]$, то

$$\dim_H S_\xi = \alpha_0;$$

2) якщо рівняння $\sum\limits_{i\in V} q_i^x = 1$ не має коренів на $[0,1]$, то

$$\dim_H S_\xi = \lim_{k\to\infty} \alpha_k,$$

де α_k- корінь рівняння $\sum\limits_{i\in V_k} q_i^x = 1$.

Випадки 1) та 2) можна об'єднати наступним чином:

$$\dim_H S_\xi = \sup\{x : \sum_{i\in V} q_i^x \geq 1\}.$$

Чи залишається остання теорема правильною при довільному взаємному розташування циліндрів першого рангу? Контрприклад, який міститься в розділі 3, показує що при фіксованому стохастичному векторі Q_∞ і при фіксованій послідовності незалежних випадкових величин ξ_k фрактальні властивості спектрів випадкових величин (2) з незалежними GLS-символами навіть у випадку однакової розподіленості ξ_k суттєво залежать від взаємного розташування циліндрів першого рангу відповідного GLS-розкладу. Зауважимо, що аналогічний феномен відсутній для класів розподілів випадкових величин з незалежними символами розкладів Люрота, Q_∞-, G^2_∞- та $I - Q_\infty$-розкладів.

Основним результатом даної роботи є повне дослідження фрактальних властивостей спектрів розподілів випадкових величин з незалежними однаково розподіленими GLS-символами.

2. GLS-розклади дійсних чисел

Нагадаємо поняття GLS-розкладу дійсних чисел та дослідимо деякі відкриті питання, з ним пов'язані.

Нехай $Q_\infty = (q_0, q_1, ...q_n, ...)-$ нескінченний стохастичний вектор з додатними координатами. Опишемо покроково процедуру побудови GLS-зображення дійсних чисел.

Крок 1.

Розглянемо зчисленну послідовність відрізків $\Delta_i^{GLS}=[a_i;b_i]$, таких, що

$$Int\Delta_i^{GLS}\cap Int\Delta_j^{GLS}=\emptyset,(i\neq j)$$

і

$$|\Delta_i^{GLS}|=q_i, i\in N\cup\{0\}=:N_0,$$
$$\sum_{i=0}^{\infty}q_i=1.$$

Відрізок Δ_i^{GLS} називається циліндром 1-го рангу GLS-розкладу.

Крок 2. Для кожного з циліндрів 1-го рангу $\Delta_{i_1}^{GLS}$ розглянемо послідовність відрізків $\Delta_{i_1 i_2}^{GLS}\subset\Delta_{i_1}^{GLS}$ таких, що

$$\frac{|\Delta_{i_1 i_2}^{GLS}|}{|\Delta_{i_1}^{GLS}|}=q_{i_2}$$

і таких, що взаємне розташування циліндрів $\Delta_{i_1 i_2}^{GLS}$ в $\Delta_{i_1}^{GLS}$ таке ж, як і для циліндрів $\Delta_{i_1}^{GLS}$ в $[0;1]$. Відрізки $\Delta_{i_1 i_2}^{GLS}$ називаються циліндрами 2-го рангу GLS-розкладу.

Крок n. Аналогічно, для кожного з циліндрів $(n-1)$-го рангу $\Delta_{i_1 i_2\ldots i_{n-1}}^{GLS}$ розглянемо послідовність відрізків $\Delta_{i_1 i_2\ldots i_{n-1}i_n}^{GLS}\subset\Delta_{i_1 i_2\ldots i_{n-1}}^{GLS}$ таких, що

$$\frac{|\Delta_{i_1 i_2\ldots i_{n-1}i_n}^{GLS}|}{|\Delta_{i_1 i_2\ldots i_{n-1}}^{GLS}|}=q_{i_n}, i_n\in N_0$$

і взаємне розташування $\Delta_{i_1 i_2\ldots i_n}^{GLS}$ в $\Delta_{i_1 i_2\ldots i_{n-1}}^{GLS}$таке ж, як і для циліндрів 1-го рангу в $[0;1]$.

Відрізки $\Delta_{i_1 i_2\ldots i_n}^{GLS}$ називаються циліндрами n-го рангу GLS-розкладу.

Нехай $q_{max}:=\max\limits_i q_i$. За побудовою $|\Delta_{i_1 i_2\ldots i_n}^{GLS}|=q_{i_1}\cdot q_{i_2}\cdot\ldots\cdot q_{i_n}\leq(q_{\max})^n\to 0, n\to\infty$.

Розглянемо послідовність множин

$$M_1:=\bigcup_{i_1=0}^{\infty}\Delta_{i_1}^{GLS},$$
$$M_2:=\bigcup_{i_1=0}^{\infty}\bigcup_{i_2=0}^{\infty}\Delta_{i_1 i_2}^{GLS},$$
$$\ldots$$
$$M_n:=\bigcup_{i_1=0}^{\infty}\bigcup_{i_2=0}^{\infty}\ldots\bigcup_{i_n=0}^{\infty}\Delta_{i_1 i_2\ldots i_n}^{GLS},\ldots$$

Нехай

$$M:=\bigcap_{n=1}^{\infty}M_n.$$

Для довільної послідовності індексів $\{i_k\}$, $i_k\in N_0$ існує послідовність таких вкладених відрізків

$$\Delta_{i_1}^{GLS}\supset\Delta_{i_1 i_2}^{GLS}\supset\Delta_{i_1 i_2 i_2}^{GLS}\supset\ldots\supset\Delta_{i_1 i_2\ldots i_k}^{GLS}\supset\ldots,$$

що $|\Delta_{i_1 i_2\ldots i_k}^{GLS}|\to 0, k\to\infty$. Тому існує єдина точка $x\in[0;1]$, яка належить всім цим циліндрам.

І навпаки, якщо $x \in M$, то існує послідовність циліндрів

$$\Delta^{GLS}_{i_1(x)} \subset \Delta^{GLS}_{i_1(x)i_2(x)} \subset \Delta^{GLS}_{i_1(x)i_2(x)i_3(x)} \subset \ldots \subset \Delta^{GLS}_{i_1(x)i_2(x)\ldots i_k(x)} \subset \ldots,$$

які містять x, і при цьому

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^{GLS}_{i_1(x)i_2(x)\ldots i_k(x)} = \Delta^{GLS}_{i_1(x)i_2(x)\ldots i_k(x)\ldots} \tag{3}$$

Вираз (3) називається GLS-розкладом (зображенням, представленням, розвиненням) точки x.

Зауваження 1. *В залежності від взаємного розташування циліндрів 1-го рангу зображення (3) може бути єдиним, а може існувати зчисленна множина точок, що мають два різні GLS-зображення.*

Якщо

$$\Delta^{GLS}_{\infty} = \emptyset,$$

то для довільної точки $x \in [0, 1]$ існує послідовність циліндрів

$$\Delta^{GLS}_{i_1(x)} \subset \Delta^{GLS}_{i_1(x)i_2(x)} \subset \Delta^{GLS}_{i_1(x)i_2(x)i_3(x)} \subset \ldots \subset \Delta^{GLS}_{i_1(x)i_2(x)\ldots i_k(x)} \subset \ldots,$$

які містять x, і

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^{GLS}_{i_1(x)i_2(x)\ldots i_k(x)} = \Delta^{GLS}_{i_1(x)i_2(x)\ldots i_k(x)\ldots}.$$

Частковим випадком GLS-розкладу числа $x \in [0, 1]$ є розклад Люрота. У цьому випадку $q_i = \frac{1}{(i+1)(i+2)}$ і $\sup \Delta_{i+1} = \inf \Delta_i$. Якщо відношення довжин вкладених циліндрів двох послідовних рангів залежить від останнього індексу циліндра і є степенем числа $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ і серед циліндрів одного рангу, які належать циліндру попереднього рангу, немає самого лівого і самого правого циліндра, то отримаємо G^2_{∞}-зображення числа x. ([5]).

Позначимо через Δ^{GLS}_{∞} множину тих точок з $[0; 1]$, які не попали до жодного з Δ^{GLS}_{i}, тобто

$$\Delta^{GLS}_{\infty} := [0; 1] \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} \Delta^{GLS}_{i}.$$

Очевидно, що Δ^{GLS}_{∞} є борелівською множиною нульової міри Лебега (оскільки сума довжин циліндрів першого рангу дорівнює 1). У роботі [1] наведено приклади GLS-розкладів, які показують, що множина Δ^{GLS}_{∞} може бути порожньою, скінченною, зчисленною і навіть континуальною.

Дослідимо фрактальні властивості множини Δ^{GLS}_{∞}.

Теорема 2. *Для довільного числа $d \in [0; 1]$ існує такий GLS-розклад дійсних чисел, для якого розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини Δ^{GLS}_{∞} дорівнює*

$$\dim_H \Delta^{GLS}_{\infty} = d. \tag{4}$$

Доведення. У випадку $d = 0$ в якості GLS-розкладу можна взяти класичний розклад Люрота (або довільний інший GLS-розклад, для якого множина Δ_∞^{GLS} є скінченною або зчисленною).

Розглянемо випадок, коли $d \in (0;1)$. Побудуємо GLS-розклад, для якого розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини Δ_∞^{GLS} дорівнює d. Для цього розглянемо множину $A_d := \{x : x = \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \alpha_j \in \{0,2\}\}$, де

$$Q = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^d, 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-d}{d}}, \left(\frac{1}{2}\right)^d\right),$$

$d \in (0;1)$.

A_d– абсолютно самоподібна множина канторівського типу, розмірність Хаусдорфа-Безиковича якої, як відомо, є розвязком рівняння

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^d\right)^x + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^d\right)^x = 1.$$

Отже, $\dim_H A_d = d$.

Нехай $\{(a_j;b_j)\}$ послідовність інтервалів, суміжних до множини A_d, $\Delta_j^{GLS} := [a_j;b_j]$. Тоді $\Delta_\infty^{GLS} = A_d \setminus \bigcup\limits_{j=0}^{\infty}\{a_j;b_j\}$. Тому

$$\dim_H \Delta_\infty^{GLS} = \dim_H A_d = d.$$

З метою побудови GLS-розкладу, для якого множина Δ_∞^{GLS} є суперфрактальною, розглянемо Q^*-розклад дійсних чисел, для якого $s = 3$, $q_{1k} = \frac{1}{2k}$, $q_{0k} = q_{2k} = \frac{1-q_{1k}}{2}$ і множину канторівського типу

$$A_1 := \{x : x = \Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}, \alpha_j(x) \in \{0,2\}\}.$$

Як відомо ([2]), розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини A_1 дорівнює 1, але міра Лебега при цьому дорівнює 0. Нехай $\{(a_j,b_j)\}$-послідовність інтервалів, суміжних до множини A_1 (для визначеності впорядкуємо ці інтервали за довжиною, а у випадку рівності довжин - за розташуванням зліва направо). Означимо $\Delta_j^{GLS} := [a_j;b_j]$. У цьому випадку множина Δ_∞^{GLS} матиме наступний вигляд

$$\Delta_\infty^{GLS} = A_1 \setminus \left(\bigcup_{j=0}^{\infty}\{a_j,\ b_j\}\right).$$

Оскільки множина межових точок послідовності суміжних інтервалів (a_j,b_j) є зчисленною, то $\dim_H(\Delta_\infty^{GLS}) = 1$.

□

3. Про деякі фрактальні феномени, пов'язані з розподілами випадкових величин з незалежними GLS-символами

Нехай $\{\xi_k\}-$ послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин:

$$P(\xi_k = i) := p_i \geq 0, \forall i \in N_0, \ \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1,$$

а $\xi = \Delta^{GLS}_{\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_k \ldots}-$ випадкова величина з незалежними однаково розподіленими GLS-символами. Позначимо через μ_ξ відповідну ймовірнісну міру, яку називатимемо ймовірнісною мірою з незалежними однаково розподіленими GLS-символами. Властивості розподілу μ_ξ залежать від стохастичного вектора $Q_\infty = (q_0, q_1, q_2, \ldots)$, стохастичного вектора $P_\infty = (p_0, p_1, p_2, \ldots)$ та закону взаємного розміщення циліндрів першого рангу в одиничному відрізку (розміщення циліндрів (n+1)-го рангу в циліндрі n-го рангу таке ж саме, як і розміщення циліндрів першого рангу в [0;1]).

Нагадаємо, що спектром S_ν ймовірнісної міри ν називається мінімальний *замкнений* носій цієї міри. При цьому $S_\nu = \{x : \forall \varepsilon > 0, \nu((x-\varepsilon, x+\varepsilon)) > 0\}$.

З метою дослідження метричних та фрактальних властивостей спектра S_ξ випадкової величини ξ з незалежними однаково розподіленими GLS-символами в роботі [11] детально вивчались властивості множин наступного виду:

$$C[GLS, V] = \{x : x = \Delta_{\alpha_1(x) \ldots \alpha_k(x) \ldots}, \alpha_k \in V\} \tag{5}$$

де V - деяка зліченна множина. Зауважимо, що навіть для найпростішого варіанту упорядкування циліндрів, що приводить до Q_∞-розкладів, проблема обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича множин виду (5) пройшла непросту еволюцію виправлення хибних тверджень (див., наприклад, [4] стор.82; [20], стор.102) і була повністю розв'язана у [2]. Інший підхід для дослідження властивостей множин виду (5) для загальних GLS-розкладів (з використанням перетворень, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича на певній множині (див., наприклад, [2])) було здійснено в роботі [1]. У наступній теоремі висвітлено фрактальні властивості множини $C[GLS, V]$ у загальному випадку $GLS-$розкладу.

Теорема 3. *([1, 11]) Нехай $V := \{i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots\}$, де $i_k < i_{k+1}$; $V_k := \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$. Тоді*

1) якщо рівняння $\sum\limits_{i \in V} q_i^x = 1$ має корінь α_0 на $[0;1]$, то

$$\dim_H C[GLS, V] = \alpha_0;$$

2) якщо рівняння $\sum\limits_{i \in V} q_i^x = 1$ не має коренів на $[0;1]$, то

$$\dim_H C[GLS, V] = \lim_{k \to \infty} \alpha_k,$$

де α_k- корінь рівняння $\sum\limits_{i \in V_k} q_i^x = 1$.

Випадки 1) та 2) можна об'єднати наступним чином:

$$\dim_H C[GLS, V] = \sup\{x : \sum_{i \in V} q_i^x \geq 1\}.$$

Для випадку, коли множина Δ^{GLS}_{∞} є не більш як зчисленною, остання теорема є базою для знаходження розмірності Хаусдорфа-Безиковича спектра випадкової величини ξ (у цьому випадку теорема 1 є фактично наслідком теореми 3).

Основна мета даного розділу - дати відповідь на питання, поставлене у вступі: чи залишається правильною теорема 1 для випадку, коли множина Δ^{GLS}_{∞} має потужність континуум.

Покажемо, що у випадку континуальності множини Δ^{GLS}_{∞} твердження теореми 1 є, взагалі кажучи, неправильним. З цією метою побудуємо спеціальний GLS-розклад за наступним алгоритмом.

Розглянемо допоміжну множину

$$A = \{x : x = \Delta^{Q}_{\beta_1(x)\beta_2(x)\ldots\beta_k(x)\ldots}, \beta_k \in \{0,2\}\},$$

де $Q = (\frac{1-a}{2}; a; \frac{1-a}{2})$, $a \in (0;1)$. Зрозуміло, що A – ніде не щільна самоподібна множина, розмірність Хаусдорфа-Безиковича якої дорівнює $\log_{\frac{1-a}{2}} \frac{1}{2}$. Позначимо через $\{(a_n; b_n)\}$ послідовність інтервалів, суміжних до множини A.

Множину $N_0 := \{0, 1, 2, 3\ldots\}$ розіб'ємо на зчисленне об'єднання зчисленних множин за принципом, який отримується з класичного порядку О.М.Шарковського :

$$\begin{gathered} N_0 = \{0, \ \ 1, \quad 2, \quad 4, \quad 8, \ \ldots, \quad 2^n, \ \ldots \\ 3\cdot 1, \ 3\cdot 2, \ 3\cdot 4, \ 3\cdot 8, \ \ldots, \ 3\cdot 2^n, \ \ldots \\ 5\cdot 1, \ 5\cdot 2, \ 5\cdot 4, \ 5\cdot 8, \ \ldots, \ 5\cdot 2^n, \ \ldots \\ 7\cdot 1, \ 7\cdot 2, \ 7\cdot 4, \ 7\cdot 8, \ \ldots, \ 7\cdot 2^n, \ \ldots \\ 9\cdot 1, \ 9\cdot 2, \ 9\cdot 4, \ 9\cdot 8, \ \ldots, \ 9\cdot 2^n, \ \ldots \\ \cdots \\ (2n+1)\cdot 1, \ (2n+1)\cdot 2, \ (2n+1)\cdot 4, \ (2n+1)\cdot 8, \ \ldots, \ (2n+1)\cdot 2^n, \ \ldots\}. \end{gathered} \tag{6}$$

Використовуючи перший рядок (6), здійснимо розбиття $(a_1; b_1)$ на циліндри першого рангу GLS-розладу.

Нехай Δ^{GLS}_0 - відрізок, який є центральним для $(a_1; b_1)$ і $q_0 = |\Delta^{GLS}_0| = \frac{1}{3}$.

$$\begin{gathered} \sup \Delta^{GLS}_1 = \inf \Delta^{GLS}_0, \quad |\Delta^{GLS}_1| = \frac{1}{2}|\Delta^{GLS}_0|; \\ \inf \Delta^{GLS}_2 = \sup \Delta^{GLS}_0, \quad |\Delta^{GLS}_2| = \frac{1}{2}|\Delta^{GLS}_0|; \\ \sup \Delta^{GLS}_4 = \inf \Delta^{GLS}_1, \inf \Delta^{GLS}_8 = \sup \Delta^{GLS}_2, \\ |\Delta^{GLS}_4| = |\Delta^{GLS}_8| = \frac{1}{4}|\Delta^{GLS}_0|. \end{gathered}$$

Аналогічно

$$\begin{gathered} \sup \Delta^{GLS}_{2^{2k}} = \inf \Delta^{GLS}_{2^{2k-2}}, \inf \Delta^{GLS}_{2^{2k+1}} = \sup \Delta^{GLS}_{2^{2k-1}}, \\ |\Delta^{GLS}_{2^{2k}}| = |\Delta^{GLS}_{2^{2k+1}}| = \frac{1}{2^{k+1}}|\Delta^{GLS}_0|, \ldots \end{gathered}$$

Позначимо через C_n множину тих чисел, які належать n-му рядку таблиці (1). Зрозуміло, що

$$\bigcup_{i\in C_1}\Delta_i^{GLS}=(a_1;b_1).$$

Використовуючи множину $C_n(n>1)$, здійснимо розбиття $(a_n;b_n)$ на циліндри першого рангу.

$$\Delta_{2n-1}^{GLS}=[\frac{7a_n-b_n}{6};\frac{5a_n+b_n}{6}].$$

$$\sup\Delta_{(2n-1)2}^{GLS}=\inf\Delta_{(2n-1)}^{GLS},\inf\Delta_{(2n-1)4}^{GLS}=\sup\Delta_{(2n-1)}^{GLS},$$
$$|\Delta_{(2n-1)2}^{GLS}|=|\Delta_{(2n-1)4}^{GLS}|=\frac{1}{2}|\Delta_{(2n-1)}^{GLS}|.$$

$$\sup\Delta_{(2n-1)2^{2k-1}}^{GLS}=\inf\Delta_{(2n-1)2^{2k-3}}^{GLS},\inf\Delta_{(2n-1)2^{2k}}^{GLS}=\sup\Delta_{(2n-1)2^{2k-2}}^{GLS},$$
$$|\Delta_{(2n-1)2^{2k-1}}^{GLS}|=|\Delta_{(2n-1)2^{2k}}^{GLS}|=\frac{1}{2^k}|\Delta_{(2n-1)}^{GLS}|.$$

Тобто, для даного GLS-розкладу стохастичний вектор Q_∞ має наступний вигляд (упорядкування індексів співпадає з упорядкуванням (6)):

$$\begin{array}{llllllllll} Q_\infty=\{\frac{1}{3}a, & \frac{a}{6}, & \frac{a}{6}, & \frac{a}{12}, & \frac{a}{12}, & \frac{a}{24}, & \frac{a}{24}, \ldots, & \frac{a}{3\cdot 2^{k-2}}, & \frac{a}{3\cdot 2^{k-1}}, \ldots \\ & \frac{a^2}{3}, \frac{a^2}{6}, & \frac{a^2}{6}, & \frac{a^2}{12}, & \frac{a^2}{12}, & \frac{a^2}{24}, \ldots, & & \frac{a^2}{3\cdot 2^{k-2}}, & \frac{a^2}{3\cdot 2^{k-1}}, \ldots \\ & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ & \frac{a^n}{3}, \frac{a^n}{6}, & \frac{a^n}{6}, & \frac{a^n}{12}, & \frac{a^n}{12}, & \frac{a^n}{24}, \ldots, & & \frac{a^n}{3\cdot 2^{k-2}}, & \frac{a^n}{3\cdot 2^{k-1}}, \ldots\} \end{array}$$

За побудовою

$$\bigcup_{i\in C_n}\Delta_i^{GLS}=(a_n;b_n).$$

Для вказаного GLS-розкладу множина Δ_∞^{GLS} співпадає з множиною A.

Нехай D_m - множина тих натуральних чисел, які стоять в m-му стовпчику таблиці (1) (зауважимо, що в нульовому стовпчику стоїть лише число 0). Нехай

$$V=\bigcup_{k=1}^{\infty}D_{4k-2}.$$

Для даного GLS-розкладу розглянемо послідовність незалежних випадкових величин $\{\xi_k\}$ так, щоб $p_k=0$ якщо $k\notin V$ і $p_k>0$ якщо $k\in V$ (при цьому $\sum\limits_{k=0}^{\infty}p_k=1$).

Нехай $C[GLS,V]:=\{x:x=\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}^{GLS},\alpha_j\in V\}$.

З конструкції побудови розподілу випадкової величини ξ та множини Aвипливає, що спектр випадкової величини ξ, будучи замкненою множиною, має вигляд

$$S_\xi=A\cup C[GLS,V].$$

Як відомо (теорема 3), розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини $C[GLS,V]$ обчислюється за формулою

$$\dim_H C[GLS, V] = \sup\{x : \sum_{i\in V} q_i^x \geq 1\},$$

а у випадку, коли рівняння

$$\sum_{i\in V} q_i^x = 1$$

має корінь, розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини $C[GLS, V]$ співпадає з ним.

У нашому випадку

$$\sum_{i\in V} q_i^x = \left(\left(\frac{a}{6}\right)^x + \left(\frac{a^2}{6}\right)^x + ... + \left(\frac{a^n}{6}\right)^x + ...\right) + \left(\left(\frac{a}{24}\right)^x + \left(\frac{a^2}{24}\right)^x + ... + \left(\frac{a^n}{24}\right)^x + ...\right) + ...$$

$$... + \left(\left(\frac{a}{6\cdot 4^{k-1}}\right)^x + \left(\frac{a^2}{6\cdot 4^{k-1}}\right)^x + ... + \left(\frac{a^n}{6\cdot 4^{k-1}}\right)^x + ...\right) =$$

$$= \frac{\left(\frac{a}{6}\right)^x}{1-a^x} + \frac{\left(\frac{a}{24}\right)^x}{1-a^x} + ... + \frac{\left(\frac{a}{6\cdot 4^{k-1}}\right)^x}{1-a^x} + ... = \frac{(2a)^x}{3^x\cdot(1-a^x)(4^x-1)}.$$

Отже, для вказаної випадкової величини ξ відповідне рівняння має вигляд:

$$\frac{(2a)^x}{3^x(4^x-1)(1-a^x)} = 1. \tag{7}$$

При $a = \frac{1}{3}$ множина A співпадає з класичною множиною Кантора, розмірність якої дорівнює $\frac{\ln 2}{\ln 3} > 0,63$. При цьому корінь рівняння (7) не перевищує числа 0,52. Отже, взагалі кажучи,

$$\dim_H S_\xi \neq \sup\{x : \sum_{i\in V} q_i^x \geq 1\}$$

навіть для випадку однакової розподіленості випадкових величин ξ.

Причина вказаного вище феномену (який відсутній для випадкових величин з незалежними $I-Q_\infty$-символами) полягає у тому, що замикання множини $C[GLS, V]$ має більшу розмірність, ніж сама множина $C[GLS, V]$ за рахунок того, що до замикання вказаної множини входить множина Δ_∞^{GLS} та зчисленна кількість множин, які подібні до Δ_∞^{GLS}. Тому, незважаючи на те, що множина $C[GLS, V]$ є носієм міри μ_ξ, її замикання (яке співпадає зі спектром) має більшу розмірність, ніж "суттєвий носій"$C[GLS, V]$. Тому природною гіпотезою щодо розмірності спектра була наступна гіпотеза: "при довільному GLS-розкладі розмірність Хаусдорфа-Безиковича спектра випадкової величини ξ з незалежними однаково розподіленими GLS-символами дорівнює

$$\dim_H S_\xi = \max\{\dim_H \Delta_\infty^{GLS}, \sup\{x : \sum_{i\in V} q_i^x \geq 1\}\},$$

де

$$V = \{i : p_i > 0\}.$$

Покажемо, що ця гіпотеза неправильна.

Розіб'ємо відрізок $[0; 1]$ на циліндри першого рангу GLS-розкладу. З цією метою на відрізку $[\frac{1}{2}, 1]$ побудуємо множину C', яка утворюється при дії перетворення $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ на класичну множину Кантора.

Нехай $[a_j; b_j]-$ відрізки, які суміжні до множини C'. Позначимо

$$\Delta_j^{GLS} := [a_j, b_j], j = 2k, k \in N_0.$$

Циліндри Δ_i^{GLS}, для яких $i = 2k+1, k \in N_0$ розташуємо на $[0; \frac{1}{2}]$ так, щоб

$$\sup \Delta_1^{GLS} = \frac{1}{2}, \inf \Delta_i^{GLS} = \sup \Delta_{i+2}^{GLS},$$

$$|\Delta_i^{GLS}| = \frac{1}{2}|\Delta_{i+2}^{GLS}|.$$

Для цього GLS-розкладу розглянемо послідовність незалежних випадкових величин $\{\xi_k\}$ так, що $p_{2k} = 0, p_{4k+3} = 0, p_{4k+1} > 0, k \in N_0$.

З конструкції побудови розподілу випливає, що $\Delta_\infty^{GLS} = C' \cup \{0\}$, а отже,

$$\dim_H \Delta_\infty^{GLS} = \dim_H C' = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,63.$$

Для даного GLS-розкладу спектр S_ξ відрізняється від множини $C[GLS, V], V = \{i : i = 4k+1, k \in N\}$ зчисленною кількістю точок виду $\inf \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_n}^{GLS},\ i_j \in \{1, 5, 9, ..., 4k+1, ...\}$. Отже, розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини $C[GLS, V]$ співпадає з розмірністю спектра і є розв'язком рівняння

$$(\frac{1}{4})^x + (\frac{1}{16})^x + (\frac{1}{64})^x + ... = 1,$$

$$\frac{(\frac{1}{4})^x}{1 - (\frac{1}{4})^x} = 1,$$

звідки $x = \frac{1}{2}$. Отже, $\dim_H S_\xi = \frac{1}{2}$ і $\dim_H S_\xi \neq \dim_H \Delta_\infty^{GLS}$.

4. Фрактальні властивості спектра

Як показано у попередньому розділі, розмірність Хаусдорфа-Безиковича спектра випадкової величини ξ з незалежними однаково розподіленими GLS-символами суттєво залежить не лише від стохастичних матриць Q_∞ та P_∞, але і від взаємного розташування циліндрів одного рангу між собою.

З метою знаходження загальної формули для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича спектра випадкової величини ξ дослідимо його топологічну структуру.

Лема 1. *При довільному GLS-розкладі та довільній стохастичній матриці P_∞ має місце рівність*

$$S_\xi = (C[GLS, V])^{cl},$$

де $V = \{i : p_i > 0\}$, а E^{cl} означає замикання множини E.

Доведення. а) Покажемо спочатку, що $C[GLS, V] \subset S_\xi$.

Нехай x_0- довільна точка з $C[GLS, V]$. Тоді

$$x_0 = \Delta_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\ldots\alpha_k(x_0)\ldots}^{GLS}, \alpha_k \in V.$$

Нехай $\varepsilon-$ довільне додатне число. Для обраного $\varepsilon > 0$ існує $k = k(\varepsilon) \in N$ таке, що

$$\Delta_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\ldots\alpha_k(x_0)}^{GLS} \subset (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon).$$

Оскільки
$$P\{\xi\in\Delta^{GLS}_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\ldots\alpha_k(x_0)}\}=\prod_{j=1}^{k}P_{\alpha_j(x_0)}>0,$$
то
$$P\{\xi\in(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)\}\geq P\{\xi\in\Delta^{GLS}_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\ldots\alpha_k(x_0)}\}>0.$$
Отже, $x_0\in S_\xi$.

б) Покажемо, що $S_\xi=(C[GLS,V])^{cl}$.

Оскільки $S_\xi-$ замкнена множина, то з того, що $E\subset S_\xi$, випливає, що $E^{cl}\subset S_\xi$.

Отже,
$$S_\xi=(C[GLS,V])^{cl}\subset S_\xi.$$
З іншого боку, $P\{\xi\in C[GLS,V]\}=1$. Тому $P\{\xi\in(C[GLS,V])^{cl}\}=1$. Отже, $(C[GLS,V])^{cl}-$ замкнений носій міри μ_ξ. Оскільки $S_\xi-$ мінімальний замкнений носій міри μ_ξ, то $S_\xi\subset(C[GLS,V])^{cl}$, що і доводить лему. □

Наступна теорема дає відповідь на питання про розмірність Хаусдорфа-Безиковича спектра S_ξ в термінах елементів двох вказаних стохастичних матриць та множини Δ^{GLS}_V.

Теорема 4. *Нехай*
$$\Delta^{GLS}_V:=\left(\bigcup_{i_1\in V}\Delta^{GLS}_{i_1}\right)^{cl}\setminus\left(\bigcup_{i_1\in V}\Delta^{GLS}_{i_1}\right),$$
де $V=\{i:p_i>0\}$. *Тоді*
$$\dim_H S_\xi=\max\{\dim_H\Delta^{GLS}_V,\sup\{x:\sum_{i\in V}q_i^x\geq 1\}\}.$$

Доведення. 1) Доведемо спочатку, що $\Delta^{GLS}_V\subset S_\xi$. Якщо $x_0\in\Delta^{GLS}_V$, то існує послідовність точок $\{x_n\}$, така, що $x_n\in\bigcup_{i_1\in V}\Delta^{GLS}_{i_1}$, $x_n\to x_0$, $n\to\infty$.

Оскільки x_0 не належить $\bigcup_{i_1\in V}\Delta^{GLS}_{i_1}$ і циліндри першого рангу не мають спільних внутрішніх точок, то існує послідовність попарно різних циліндрів першого рангу $\{\Delta^{GLS}_{k_n}\}=\{[a_n;b_n]\}$ така, що $k_n\in V(\forall n\in N)$ і $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=x_0$.

Для довільного $\varepsilon>0$ виберемо $n_0=n_0(\varepsilon)$ так, щоб $[a_{n_0};b_{n_0}]=\Delta^{GLS}_{k_{n_0}}\subset(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)$. Оскільки $k_{n_0}\in V$, то
$$0<P\{\xi\in\Delta^{GLS}_{k_{n_0}}\}\leq P\{\xi\in(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)\}.$$
Отже, $x_0\in S_\xi$. Оскільки $\Delta^{GLS}_V\subset S_\xi$, то
$$\dim_H\Delta^{GLS}_V\leq\dim_H S_\xi.$$
Оскільки $C[GLS,V]\subset S_\xi$, то
$$\dim_H C[GLS,V]\leq\dim_H S_\xi.$$
З останніх двох нерівностей випливає, що
$$\max\{\dim_H\Delta^{GLS}_V;\dim_H C[GLS,V]\}\leq\dim_H S_\xi.$$

2) Доведемо, що $\dim_H S_\xi \leq \max\{\dim_H \Delta_V^{GLS}; \dim_H C[GLS,V]\}$. За доведеною лемою

$$S_\xi = (C[GLS,V])^{cl}.$$

Позначимо через L множину точок спектра, що не входять до множини $C[GLS,V]$, тобто

$$L := (C[GLS,V])^{cl} \setminus C[GLS,V].$$

За доведеним в пункті 1)

$$L_1 := \Delta_V^{GLS} \subset L.$$

Позначимо через $f_{i_1 i_2 \ldots i_n}(x)$ перетворення подібності, яке є композицією стиску з коефіцієнтом $q_{i_1} \cdot q_{i_2} \cdot \ldots \cdot q_{i_n}$ та паралельного перенесення і яке переводить множину $[0;1]$ в циліндр $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_n}^{GLS}$.

Нехай

$$L_2 := \bigcup_{i_1 \in V} f_{i_1}(\Delta_V^{GLS}).$$

Користуючись вказаним вище методом, легко показати, що $L_2 \subset S_\xi$ і що точки множини L_2 не належать до жодного з циліндрів $\Delta_{i_1 i_2}^{GLS}$ другого рангу $(i_1 \in V, i_2 \in V)$.

Аналогічно

$$L_n := \bigcup_{i_1 \in V} \bigcup_{i_2 \in V} \ldots \bigcup_{i_n \in V} f_{i_1 i_2 \ldots i_n}(\Delta_V^{GLS}).$$

Покажемо, що $L \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$.

Якщо $x_1 \in L$, то $x_1 \in S_\xi$ і $x_1 \notin C[GLS,V]$. Отже, x_1 належить до доповнення до множини $C[GLS,V]$. З того що $x_1 \in \overline{C}[GLS,V])$ випливає, що $x_1 \in \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty}} F_n$, де $F_n = \bigcup_{i_1 \in V} \bigcup_{i_2 \in V} \ldots \bigcup_{i_n \in V} \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_n}^{GLS}$. Тому

$$x_1 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{F_n}.$$

Тоді існує таке n_0, що $x_1 \in \overline{F_{n_0}}$. Отже, x_1 або належить до одного із суміжних інтервалів до циліндрів n_0 рангу або x_1 є граничною точкою для послідовності циліндрів n_0 рангу. Оскільки $x_1 \in S_\xi$, то перший випадок неможливий. Таким чином $x_1 \in L_{n_0}$ і тому

$$L \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n.$$

З останнього вкладення випливає, що

$$\dim_H L \leq \dim_H \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n = \sup\{\dim_H L_n\}.$$

Оскільки $f_{i_1 i_2 .. i_n}(\Delta_V^{GLS}) \sim \Delta_V^{GLS}$, то

$$\dim_H f_{i_1 i_2 .. i_n}(\Delta_V^{GLS}) = \dim_H \Delta_V^{GLS}, \forall (i_1, i_2, ..., i_n) \in V.$$

Тоді

$$\dim_H L_n = \sup_{(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in V} \{\dim_H f_{i_1 i_2 \ldots i_n}(\Delta_V^{GLS})\} = \dim_H \Delta_V^{GLS}.$$

Отже,

$$\dim_H\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n\right) = \sup_n(\dim_H L_n) = \dim_H \Delta_V^{GLS}.$$

Оскільки $L \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L_n$, то $\dim_H L \leq \dim_H \Delta_V^{GLS}$. Тому

$$\dim_H S_\xi = \dim_H(C[GLS,V] \cup L) = \max\{\dim_H C[GLS,V], \dim_H L\} \leq$$
$$\leq \max\{\dim_H C[GLS,V], \dim_H \Delta_V^{GLS}\} = \max\{\sup\{x : \sum_{i\in V} q_i^x \geq 1\}, \dim_H \Delta_V^{GLS}\}.$$

$\square$

Література

[1] *Лупаїн М.Л.* Фрактальні властивості спектрів випадкових величин з незалежними однаково розподіленими GLS-символами// Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2014, №16(1). – С. 279-295.

[2] *Нікіфоров Р. О., Торбін Г. М.* Про розмірність Хаусдорфа-Безиковича узагальнених самоподібних множин, породжених нескінченними IFS.// Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2012, №13(1). – С. 151-1632.

[3] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженні сингулярних розподілів.– Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. – 289 с.

[4] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. К.: Наукова думка, 1992. – 208 с.

[5] *Фещенко О. Ю.*Застосування F-кодів дійсних чисел до дослідження фрактальних властивостей ймовірних мір : автореф. дис... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.05 / О. Ю. Фещенко ; Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка. – Київ, 2008. – 20 с.

[6] *Гарко І. І., Торбін Г. М.*Про $x - Q_\infty$-зображення дійсних чисел та проблеми, з ними пов'язані.//Матеріали Міжнародної наукової конференції "Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь. - Київ: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 2012, — С. 48-50.

[7] *Albeverio S., Torbin G.* Fractal properties of singularly continuous probability distributions with independent Q^* - digits//Bull. Sci. Math. - **129** (2005), No 4, C. 356–367.

[8] *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension // Ergodic Theory and Dynamical Systems. –200,. Vol. 24, no. 1. – P. 1–16.

[9] *Dajani K. Dajani K., Kraaikamp C.* Ergodic theory of numbers. – Washington: The Mathematic Association of America, 2002. – 190 p.

[10] *Falconer. K.* Fractal geometry: mathematical foundations and applications. – New York: John Willey and Sons, 1990. – 367 p.

[11] *Lupain M.L.* Generalized Lüroth expansions and related probability measures// submitted to MSTA.