Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2014, № 16 (1). — С. 134–143.

Про DP-перетворення, що породжені випадковими величинами з незалежними Q^*-символами

Ібрагім М. Х., Торбін Г. М.
(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова)

Анотація. Стаття присвячена знаходженню необхідних і достатніх умов збереження розмірності Хаусдорфа-Безиковича функціями розподілу випадкових величин з незалежними Q^*-символами при умові відділеності елементів стохастичних матриць Q^* та P^* від нуля.

Ключові слова: фрактали, DP-перетворення, Q^*-зображення, сингулярно неперервні ймовірнісні міри.

Abstract. The paper is devoted to the finding of necessary and fufficient conditions for the Hausdorff-Besicovitch dimension preservation by distribution functions of random variables with independent symbols under assumptions that elements of stochastic matrices Q^* and P^* are bounded away from zero.

Key words: fractals, DP-transformations, Q^*-representations, singularly continuous probability measures.

Mathematics Subject Classification (2010): 11K55, 26A30, 28A80, 60E10.

1. Вступ

Нехай (M_1, ρ_1) та (M_2, ρ_2) - метричні простори, а f - бієкція $M_1 \to M_2$. Припустимо, що в даних просторах розмірності Хаусдорфа-Безиковича $\dim_{H_1}$ і $\dim_{H_2}$ є коректно визначеними.

Означення **1.** Відображення f називається відображенням, що зберігає розмірність Хаусдорфа-Безиковича (DP-відображенням), якщо

$$\dim_{H_1}(E) = \dim_{H_2}(f(E)) , \qquad \forall E \subset M_1 .$$

Важливим є випадок, коли $(M_1, \rho_1) = (M_2, \rho_2)$. У цьому випадку говорять про DP-перетворення простору. Найпростішими прикладами DP-пертворень є бі-ліпишцеві перетворення, тобто такі, для яких виконується умова

$$\frac{1}{C}\ \rho(x,y) \le \rho(f(x), f(y)) \le C\ \rho(x,y), \quad \forall x, y$$

і деякої додатної константи C. Прикладами таких перетворень можуть слугувати афінні перетворення, а, отже, всі рухи простору та перетворення подібності. K. Falconer в роботі [10] запропонував розглядати множини як фрактально еквівалентні, якщо існує біліпшицеве відображення однієї множини на іншу. В роботі [4] запропоновано DP-підхід до фрактальної геометрії як математичної дисципліни, яка вивчає інваріанти групи DP-перетворень. Як показано в [4], група DP-перетворень є значно ширшою за групу бі-ліпищцевих перетворень. Проблеми характеризації всіх DP-перетворень є дуже складною навіть для випадку R^1. В [4] показано, що проблема вивчення неперервних DP-перетворень R^1 рівносильна проблемі вивчення строго зростаючих функцій розподілу на одиничному відрізку та їх фрактальних властивостей. Основним завданням даної роботи є знаходження необхідних і достатніх умов збереження розмірності Хаусдорфа-Безиковича функціями розподілу випадкових величин з незалежними Q^*-символами ([6, 14]) при умові відділеності елементів стохастичних матриць Q^* та P^* від нуля. Зауважимо, що результати робіт [4, 16] можна отримати як прості наслідки отриманих в даній статті результатів.

2. DP-перетворення та ймовірнісні міри з незалежними Q^*-символами.

Нехай Q^*-стохастична матриця, така, що:

$$Q^*=\begin{pmatrix} q_{01} & q_{02} & \dots & q_{0k} & \dots \\ q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1k} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ q_{s-11} & q_{s-12} & \dots & q_{s-1k} & \dots \end{pmatrix};$$

1) $q_{ik} > 0 \quad (\forall i \in \{0, 1, \dots, s-1\}, \forall k \in N)$;

2) $\sum\limits_{i=0}^{s-1} q_{ik} = 1 \qquad , \forall k \in N$;

3) $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_{i} q_{ik} = 0$.

Розглянемо випадкову величину ξ з незалежними Q^*-символами [6, 14]:

$$\xi = \Delta^{Q^*}_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_k \dots} , \tag{1}$$

де ξ_k набуває значень $\{0, 1, \dots, s-1\}$ з ймовірностями $\{p_{0k}, p_{1k}, \dots, p_{s-1k}\}$ відповідно, ($p_{ik} \geq 0$, $\sum\limits_{i=0}^{s-1} p_{ik} = 1$).

Основна задача цього розділу - знаходження умов, при яких функція розподілу F_ξ зберігає розмірність Хаусдорфа-Безиковича на $[0, 1]$. Зрозуміло, що властивості $F_\xi(x)$ визначаються матрицями Q^* та P^*,

$$P^* = ||p_{ik}||, \quad i \in \{0, 1, \dots, s-1\}, \quad k \in N.$$

Оскільки кожна DP-функція не має інтервалів постійності, то матриця Q^* не містить нулів. Отже, спектр випадкової величини ξ співпадає з $[0,1]$, тобто

$$\forall x \in [0,1]\ ,\quad \forall \epsilon > 0 :\quad F_\xi(x+\epsilon) - F_\xi(x-\epsilon) > 0\ .$$

Теорема 1. *Нехай $F_\xi(x)$ - функція розподілу випадкової величини з незалежними Q^*-символами. Якщо $F_\xi(x)$ зберігає розмірність Хаусдорфа-Безиковича на $[0,1]$, то*

$$\dim_H \mu_\xi = 1\ ,$$

де

$$\dim_H \mu_\xi = \inf_{E \in B(\mu_\xi)} \{\dim_H E\}\ ,$$
$$B(\mu_\xi) = \{E :\quad \mu_\xi(E) = 1\}\ .$$

Доведення. Припустимо, що $F_\xi(x)$ зберігає розмірність Хаусдорфа-Безиковича, але при цьому

$$\dim_H \mu_\xi = C_0 < 1\ .$$

Тоді ([21, 7]) існує носій E_1 (не обов'язково замкнений) міри μ_ξ такий, що

$$\dim_H E_1 = C_1 \in [C_0, 1)\ .$$

Так як

$$\mu_\xi(E_1) = 1\ ,\quad \lambda(F_\xi(E_1)) = 1,$$

то

$$\dim_H(F_\xi(E_1)) = 1 \neq C_1 = \dim_H E_1\ .$$

Але звідси випливає, що $F_\xi(x)$ не зберігає розмірність Хаусдорфа-Безиковича, що суперечить умові теореми. Отримана суперечність доводить теорему. □

Теорема 2. *Нехай $\inf\limits_{ik} p_{ik} > 0$ і $\inf\limits_{ik} q_{ik} > 0$. Тоді функція розподілу випадкової величини ξ з незалежними Q^*-символами зберігає розмірність Хаусдорфа-Безиковича на одиничному відрізку тоді і тільки тоді, коли*

$$\dim_H \mu_\xi = 1\ . \tag{2}$$

Доведення. **Необхідність** випливає з попередньої теореми.

Достатність. Як відомо ([6]), у випадку $\inf\limits_{ik} q_{ik} > 0$ розмірність Хаусдорфа-Безиковича міри μ_ξ (тобто інфімум розмірностей Хаусдорфа-Безиковича всеможливих носіїв (не обов'язково замкнених) міри μ_ξ) дорівнює

$$\dim_H \mu \ = \ \varliminf_{n\to\infty} \frac{h_1 + h_2 + ... + h_n}{b_1 + b_2 + ... + b_n}, \tag{3}$$

де $h_k = -\sum\limits_{i=0}^{s-1} p_{ik} \ln p_{ik}$, і $b_k = -\sum\limits_{i=0}^{s-1} p_{ik} \ln q_{ik}$.

Тому

$$\dim_H \mu_\xi = 1 \Leftrightarrow \varliminf_{n\to\infty} \frac{h_1 + h_2 + \ldots + h_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = 1\ .$$

Оскільки (див., напр., [17]) $0 \le h_k \le b_k, \quad \forall k \in N$, тобто

$$-\sum_{i=0}^{s-1} p_{ik} \ln p_{ik} \le -\sum_{i=0}^{s-1} p_{ik} \ln q_{ik} \ ,$$

$$\forall \ \overrightarrow{p_{0k}, p_{1k}, \ldots, p_{s-1k}} \ , \ \ \forall \ \overrightarrow{p_{0k}, p_{1k}, \ldots, p_{s-1k}},$$

то умова $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{h_1+h_2+\ldots+h_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n} = 1$ рівносильна існуванню границі

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h_1 + h_2 + \ldots + h_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = 1. \tag{4}$$

Доведемо, що з відокремленості елементів матриць $\|q_{ik}\|$ та $\|p_{ik}\|$ від нуля та умови (2) випливає, що

$$\lim_{k\to\infty} \ \frac{\ln \mu_\xi(\Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})}{\ln \lambda(\Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})} = 1 \ , \qquad \forall x \in [0,1] \tag{5}$$

З незалежності випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ випливає, що

$$\mu_\xi(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)}) = p_{\alpha_1(x)1} \ p_{\alpha_2(x)2} \ \ldots \ p_{\alpha_k(x)k} \ = \prod_{j=1}^{k} p_{\alpha_j(x)j}.$$

З властивостей Q^*-зображення дійсних чисел ([14, 6]) випливає, що

$$\lambda(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)}) = \prod_{j=1}^{k} q_{\alpha_j(x)j}.$$

Тому

$$\frac{\ln \mu_\xi(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})}{\ln \lambda(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{k} \ln p_{\alpha_j(x)j}}{\sum\limits_{j=1}^{k} \ln q_{\alpha_j(x)j}}. \tag{6}$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ розглянемо дві множини:

$M_\varepsilon^+ = \{j \ : \ \ |q_{ij} - p_{ij}| \le \varepsilon \ , \quad \forall i \in \{0, 1, \ldots, s-1\}\}$.

$M_\varepsilon^- = \{j \ : \ \exists i_0 \ : \ \ |q_{ij} - p_{ij}| > \varepsilon\}$.

Нехай $M_{\varepsilon,k}^+ := M_\varepsilon^+ \cap \{1, 2, \ldots, k\}$.

$M_{\varepsilon,k}^- := M_\varepsilon^- \cap \{1, 2, \ldots, k\}$.

З відокремленості елементів матриці Q^* від нуля та умови (2) випливає, що

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|M_{\varepsilon,k}^+|}{k} = 1 \ , \quad \lim_{k\to\infty} \frac{|M_{\varepsilon,k}^+|}{k} = 0.$$

Очевидно, що

$$-\ln \mu_\xi(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)}) = \sum_{j\in M_{\varepsilon,k}^+} \ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} + \sum_{j\in M_{\varepsilon,k}^-} \ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}}.$$

Якщо $\quad j \in M_{\varepsilon,k}^+$, то

$$q_{\alpha_j(x)j} - \varepsilon \le p_{\alpha_j(x)j} \le q_{\alpha_j(x)j} + \varepsilon;$$

$$\frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}+\varepsilon} \leq \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} \leq \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}-\varepsilon}.$$

Тому

$$-\ln \mu_\xi(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)}) \leq \sum_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln\frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}-\varepsilon} + \sum_{j\in M^-_{\varepsilon,k}} \ln\frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} \leq$$

$$\leq \sum_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln\frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}-\varepsilon} + |M^-_{\varepsilon,k}| \ln\frac{1}{p_*},$$

де $p_* = \inf\limits_{i,k} p_{ik} > 0$.

Нехай $q_* = \inf\limits_{i,k} q_{ik} > 0$. Виберемо довільне додатне ε з інтервалу $(0, \frac{1}{2}q_*)$.

Оскільки $\ln(1+t) \leq t$, $\forall\ t > -1$, то

$$\ln\frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}-\varepsilon} = \ln\left(\frac{q_{\alpha_j(x)j}}{q_{\alpha_j(x)j}-\varepsilon}\cdot\frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}}\right) =$$

$$= \ln\left(1+\frac{\varepsilon}{q_{\alpha_j(x)j}-\varepsilon}\right) + \ln\frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} \leq \frac{\varepsilon}{q_{\alpha_j(x)j}-\varepsilon} + \ln\frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}}\ .$$

Отже,

$$-\ln \mu_\xi(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)}) \leq \sum_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \frac{\varepsilon}{q_{\alpha_j(x)j}-\varepsilon} + \sum_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln\frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} + |M^-_{\varepsilon,k}| \ln\frac{1}{p_*}. \qquad (7)$$

Оцінимо вираз

$$\sum_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \frac{\varepsilon}{q_{\alpha_j(x)j}-\varepsilon}\ .$$

Оскільки

$$\varepsilon < \frac{1}{2}q_* \leq \frac{1}{2}q_{\alpha_j(x)j},$$

то

$$q_{\alpha_j(x)j}-\varepsilon > q_{\alpha_j(x)j} - \frac{1}{2}q_* \geq q_* - \frac{1}{2}q_* = \frac{1}{2}q_*$$

і

$$\frac{\varepsilon}{q_{\alpha_j(x)j}-\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}q_*} = \frac{2\varepsilon}{q_*}\ .$$

Тому

$$\sum_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \frac{\varepsilon}{q_{\alpha_j(x)j}-\varepsilon} \leq \frac{2\varepsilon}{q_*}|M^+_{\varepsilon,k}|\ .$$

Тоді

$$-\ln \mu_\xi(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)}) \leq \frac{2\varepsilon}{q_*}|M^+_{\varepsilon,k}| + |M^-_{\varepsilon,k}| \ln\frac{1}{p_*} + \sum_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln\frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}}. \qquad (8)$$

З іншого боку,

$$\forall j \in M^+_{\varepsilon,k}\ : \qquad p_{\alpha_j(x)j} \leq q_{\alpha_j(x)j}+\varepsilon.$$

Тому

$$\frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} \geq \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j} + \varepsilon},$$

і

$$\ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} \geq \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} + \ln(1 + \frac{-\varepsilon}{q_{\alpha_j(x)j} + \varepsilon}).$$

Так як $\ln(1-t) = -t + O(t^2)$, то

$$\ln(1 - \frac{\varepsilon}{q_{\alpha_j(x)j} + \varepsilon}) = -\frac{\varepsilon}{q_{\alpha_j(x)j} + \varepsilon} + O(\frac{\varepsilon}{q_{\alpha_j(x)j} + \varepsilon})^2.$$

Очевидно, що

$$\frac{\varepsilon}{q_{\alpha_j(x)j\alpha_j(x)j} + \varepsilon} \leq \frac{\varepsilon}{q_{\alpha_j(x)j\alpha_j(x)j}} \leq \frac{\varepsilon}{q_*}.$$

Тому

$$\ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} \geq \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} + (\frac{-\varepsilon}{q_*} + O(\varepsilon^2)) \ .$$

і

$$\sum_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} + \sum_{j\in M^-_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} \geq \sum_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} + (\frac{-\varepsilon}{q_*}|M^+_{\varepsilon,k}| + |M^+_{\varepsilon,k}|O(\varepsilon^2)) + |M^-_{\varepsilon,k}| \ln \frac{1}{1-p_*},$$

Отже,

$$-\ln \mu_\xi(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)}) \geq \sum_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} + (\frac{-\varepsilon}{q_*} + O(\varepsilon^2)) \ |M^+_{\varepsilon,k}| + |M^-_{\varepsilon,k}| \ln \frac{1}{1-p_*}. \quad (9)$$

Як зазначалось вище,

$$-\ln \lambda(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)}) = -\ln \frac{1}{q_{\alpha_1(x)} \cdots q_{\alpha_k(x)}} = \sum_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} + \sum_{j\in M^-_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}}.$$

Оскільки

$$\frac{1}{1-q_*} \leq \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} \leq \frac{1}{q_*},$$

то

$$|M^-_{\varepsilon,k}| \ln \frac{1}{1-q_*} \leq \sum_{j\in M^-_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} \leq |M^-_{\varepsilon,k}| \ln \frac{1}{q_*}.$$

Тому

$$\sum_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} + |M^-_{\varepsilon,k}| \ln \frac{1}{1-q_*} \leq -\ln \lambda(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)}) \leq \sum_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} + |M^-_{\varepsilon,k}| \ln \frac{1}{q_*}$$

$$\frac{-\ln \mu_\xi(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})}{-\ln \lambda(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})} \leq \frac{\sum\limits_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} + \frac{2\varepsilon}{q_*}|M^+_{\varepsilon,k}| + |M^-_{\varepsilon,k}| \ln \frac{1}{p_*}}{\sum\limits_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} + |M^-_{\varepsilon,k}| \ln \frac{1}{1-q_*}} =$$

$$= \frac{1+\frac{\frac{2\varepsilon}{q_*}|M^+_{\varepsilon,k}|}{\sum\limits_{j\in M^+_{\varepsilon,k}}\ln\frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}}}+\frac{|M^-_{\varepsilon,k}|}{\sum\limits_{j\in M^+_{\varepsilon,k}}\ln\frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}}}\ln\frac{1}{p_*}}{1+\frac{|M^-_{\varepsilon,k}|}{\sum\limits_{j\in M^+_{\varepsilon,k}}\ln\frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}}}\ \ln\frac{1}{1-q_*}} \leq \frac{1+\frac{\frac{2\varepsilon}{q_*}|M^+_{\varepsilon,k}|}{\sum\limits_{j\in M^+_{\varepsilon,k}}\ln\frac{1}{1-q_*}}+\frac{|M^-_{\varepsilon,k}|}{\sum\limits_{j\in M^+_{\varepsilon,k}}\ln\frac{1}{1-q_*}}\ln\frac{1}{p_*}}{1+\frac{|M^-_{\varepsilon,k}|}{\sum\limits_{j\in M^+_{\varepsilon,k}}\ln\frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}}}\ \ln\frac{1}{1-q_*}} =$$

$$\frac{1+\frac{\frac{2\varepsilon}{q_*}}{\ln\frac{1}{1-q_*}}+\frac{\frac{|M^-_{\varepsilon,k}|}{k}}{\frac{|M^+_{\varepsilon,k}|}{k}\ln\frac{1}{1-q_*}}\ln\frac{1}{p_*}}{1+\frac{\frac{|M^-_{\varepsilon,k}|}{k}}{\frac{1}{k}\sum\limits_{j\in M^+_{\varepsilon,k}}\ln\frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}}}\ \ln\frac{1}{1-q_*}}.$$

Тому

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\ln\mu_\xi(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})}{\ln\lambda(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})}\leq 1+\frac{2\varepsilon}{q_*}\ \frac{1}{\ln\frac{1}{1-q_*}}\ , \quad \forall\varepsilon\in(0,\frac{q_*}{2}). \tag{10}$$

Оскільки остання нерівність виконується для довільного $\varepsilon\in(0,\frac{q_*}{2})$, то

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\ln\mu_\xi(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})}{\ln\lambda(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})}\leq 1. \tag{11}$$

Аналогічно отримується оцінка

$$\frac{-\ln\mu_\xi(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})}{-\ln\lambda(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})}\geq\frac{\sum\limits_{j\in M^+_{\varepsilon,k}}\ln\frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}}+(\frac{-\varepsilon}{q_*}|M^+_{\varepsilon,k}|+|M^+_{\varepsilon,k}|O(\varepsilon^2))+|M^-_{\varepsilon,k}|\ln\frac{1}{1-p_*}}{\sum\limits_{j\in M^+_{\varepsilon,k}}\ln\frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}}+|M^-_{\varepsilon,k}|\ln\frac{1}{q_*}}.$$

Тому

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\frac{-\ln\mu_\xi(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})}{-\ln\lambda(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})}\geq 1+\frac{1}{\ln\frac{1}{q_*}}\ (O(\varepsilon^2)-\frac{\varepsilon}{q_*}), \quad \forall\varepsilon>0. \tag{12}$$

З того, що остання нерівність виконується для довільного додатного ε випливає, що

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\frac{-\ln\mu_\xi(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})}{-\ln\lambda(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})}\geq 1. \tag{13}$$

Беручи до уваги нерівності (11) та (13), приходимо до висновку про те, що

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\mu_\xi(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})}{\ln\lambda(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})}=1\ ,\forall x\in[0,1].$$

Тоді, за теоремою Біллінгслі ([8]), отримуємо:

$$\dim_H(E,\Phi(Q^*),\lambda)=\dim_H(E,\Phi(Q^*),\mu)\ , \qquad \forall E\subset[0,1]\ ,$$

(14)

де $\dim_H(E,\Phi(Q^*),\lambda)$ - розмірність Хаусдорфа-Біллінгслі множини E відносно сімейства $\Phi(Q^*)$ циліндрів Q^*-розкладу та міри Лебега λ, а $\dim_H(E,\Phi(Q^*),\mu)$ - розмірність

Хаусдорфа-Біллінгслі множини E відносно сімейства $\Phi(Q^*)$ циліндрів Q^*-розкладу та ймовірнісної міри μ_ξ (див., наприклад, [6]).

Оскільки елементи матриці Q^* відокремлені від нуля, то сімейство $\Phi(Q^*)$ є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича на одиничному відрізку ([6]). Тому

$$\dim_H(E, \Phi(Q^*), \lambda) = \dim_H(E, \Phi(Q^*) = \dim_H(E), \quad \forall E \subset [0,1]. \tag{15}$$

З іншого боку,

$$\dim_H(E, \Phi(Q^*), \mu) = \dim_H(F_\mu(E), F_\mu(\Phi(Q^*)), \lambda).$$

Зрозуміло, що F_μ-образом сімейства $\Phi(Q^*)$ є сімейство $\Phi(P^*)$ циліндрів P^*-розкладу (цей розклад отримується за тим же принципом, що і Q^*-розклад, але замість стохастичної матриці Q^* використовується стохастична матриця P^*). Оскільки елементи матриці P^* відділені від нуля, то вони рівномірно відділені і від одиниці. Тому $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_i p_{ik} = 0$. З іншого боку, з відокремленості елементів матриці P^* від нуля випливає довірчість сімейства $\Phi(P^*)$ для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича на одиничному відрізку ([6]). Тому

$$\dim_H(E, \Phi(Q^*), \mu) = \dim_H(F_\mu(E), \Phi(P^*), \lambda) = \dim_H(F_\mu(E)), \quad \forall E \subset [0,1]. \tag{16}$$

Підсумовуючи рівності (14), (4) та (16), отримуємо

$$\dim_H E = \dim_H F_\mu(E), \quad \forall E \subset [0,1],$$

що і доводить теорему. □

Використовуючи щойно доведену теорему, можна отримати результати робіт [4, 16] та нові важливі наслідки.

Наслідок 1. *Нехай ξ - випадкова величина з незалежними Q- символами ξ_k, які набувають значень $\{0, 1, \ldots, s-1\}$ з ймовірностями $\{p_{0k}, p_{1k}, \ldots, p_{s-1k}\}$ відповідно, причому*

$$\inf_{ik} p_{ik} > 0.$$

Тоді функція розподілу $F_\xi(x)$ випадкової величини ξ зберігає розмірність Хаусдорфа-Безиковича на $[0,1]$ тоді і тільки тоді, коли

$$\dim_H \mu_\xi = 1.$$

Наслідок 2. *Якщо $\inf\limits_{ik} q_{ik} > 0$ і $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{q_{ik}}{p_{ik}} = 1$, $\forall i$, то F_ξ зберігає розмірність Хаусдорфа-Безиковича на $[0,1]$.*

Наслідок 3. *Якщо $\inf\limits_{ik} q_{ik} > 0$, $\inf\limits_{ik} p_{ik} > 0$ і ξ має абсолютно неперервний розподіл на $[0,1]$, то F_ξ зберігає розмірність Хаусдорфа-Безиковича на $[0,1]$.*

Зауваження 1. *За допомогою доведеної теореми можна легко конструювати сингулярно неперервні функції розподілу, які зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича на* $[0,1]$.

Для прикладу розглянемо випадок, коли $s=3$ і $q_{0k}=q_{1k}=q_{2k}=\frac{1}{3}$;
$p_{0k}=\frac{1}{3}-\frac{1}{10\sqrt{k}}$, $p_{1k}=\frac{1}{3}$, $p_{2k}=\frac{1}{3}+\frac{1}{10\sqrt{k}}$.
У цьому випадку інтеграл Хеллінгера

$$\rho_k=\int\limits_{[0,1]}\sqrt{\frac{d\nu}{d\mu}}\,d\mu=\sum_{i=0}^{2}\sqrt{q_{ik}\,p_{ik}}=\sqrt{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-\frac{1}{10\sqrt{k}})}+\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+\frac{1}{10\sqrt{k}})}$$

має властивість

$$\prod_{k=1}^{\infty}\rho_k=\prod_{k=1}^{\infty}\left(\ \sqrt{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-\frac{1}{10\sqrt{k}})}+\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+\frac{1}{10\sqrt{k}})}\ \right)=0\ .$$

Тому $\mu_\xi\perp\lambda$ (див. [6]).

При цьому

$$h_k=-\sum_{i=0}^{2}p_{ik}\ln p_{ik}=(\frac{1}{3}-\frac{1}{10\sqrt{k}})\ln(\frac{1}{3}-\frac{1}{10\sqrt{k}})+\frac{1}{3}ln\frac{1}{3}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{10\sqrt{k}})\ln(\frac{1}{3}+\frac{1}{10\sqrt{k}})\ ,$$

$$b_k=-\sum_{i=0}^{2}p_{ik}\ln q_{ik}=-\ln\frac{1}{3}(\sum_{i=0}^{2}p_{ik})=\ln 3\ .$$

Отже,

$$\dim_H\mu_\xi=\varliminf_{k\to\infty}\frac{h_1+h_2+\ldots+h_k}{b_1+b_2+\ldots+b_k}=\varliminf_{k\to\infty}\frac{h_1+h_2+\ldots+h_k}{k\ln 3}=1\ ,$$

оскільки

$$\lim_{k\to\infty}h_k=\ln 3\ .$$

Тому F_ξ зберігає розмірність Хаусдорфа-Безиковича на $[0,1]$.

Цей приклад цікавий тим, що F_ξ не зберігає міру Хаусдорфа (більше того, існує множина нульової 1- міри Хаусдорфа така, що її F_ξ- образ має повну міру Лебега (1-міру Хаусдорфа), але при цьому F_ξ зберігає розмірність Хаусдорфа-Безиковича. Цей приклад також показує, що умова біліпшицевості є лише грубою достатньою умовою збереження розмірності Хаусдорфа-Безиковича. Справді, дана DP-функція $F_\xi(x)$, являючись строго зростаючою і сингулярно неперервною, є суттєво небіліпшицевою: з одного боку $F'_\xi(x)=0$ на множині повної міри Лебега; з іншого боку,

$$\varliminf_{\varepsilon\to 0}\frac{F_\xi(x+\varepsilon)-F_\xi(x)}{\varepsilon}=+\infty$$

на скрізь щільній множині потужності континуум.

Подяка. Ця робота була частково підтримана науково-дослідними проектами «Spectral Structures and Topological Methods in Mathematics» (SFB-701, Bielefeld

University), STREVCOM FP-7-IRSES 612669 (ЄС) та "Багаторівневий аналіз сингулярних ймовірнісних мір та його застосування"(МОН України) та Alexander von Humboldt Stiftung.

Література

[1] S. Albeverio, Yu. Kondratiev, R. Nikiforov, G. Torbin, On fractal properties of non-normal numbers with respect to Rényi f-expansions generated by piecewise linear functions, *Bull. Sci. Math.*, **138** (2014), no. 3, 440 – 455.

[2] S. Albeverio, G. Ivanenko, M. Lebid, G. Torbin On the Hausdorff dimension faithfulness and the Cantor series expansion // http://arxiv.org/pdf/1305.6036.pdf, submitted to Math.Res.Letters.

[3] S. Albeverio, V. Koshmanenko, M. Pratsiovytyi, G. Torbin, *On fine structure of singularly continuous probability measures and random variables with independent $\widetilde{Q}$- symbols*, Meth. of Func. An. Top., **17** (2011), no.2, P.97–111.

[4] S. Albeverio, M. Pratsiovytyi, G. Torbin, Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **24**(2004), no.1, 1-16.

[5] S. Albeverio, G. Torbin, *Image measures of infinite product measures and generalized Bernoulli convolutions*, Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки (2004), №5, 248–264.

[6] S. Albeverio, G. Torbin, *Fractal properties of singularly continuous probability distributions with independent Q^* - digits*, Bull. Sci. Math. **129** (2005), №4, 356–367.

[7] S. Albeverio, G. Torbin, *On fine fractal properties of generalized infinite Bernoulli convolutions*, Bull. Sci. Math., **132**(2008), no. 8. 711-727.

[8] P. Billingsley, *Hausdorff dimension in probability theory II*, Ill. J. Math. **5** (1961), 291–198.

[9] S. Chatterji *Certain induced measures on the unit interval*, Journal London Math. Soc., **38** (1963), 325–331.

[10] K. J. Falconer, *Fractal geometry*, John Wiley & Sons, 1990.

[11] B. Jessen, A. Wintner, *Distribution function and Riemann Zeta-function*, Trans.Amer.Math.Soc. **38** (1935), 48–88.

[12] P. Lévy P, *Sur les séries dont les termes sont des variables indépendantes*, Studia Math. **3** (1931), 119–155.

[13] Г. М. Торбін, *Мультифрактальний аналіз сингулярно неперевних ймовірнісних мір*, Український математичний журнал, **57** (2005), №5, 837–857.

[14] Г.М.Торбин, Н.В.Працевитый. Случайные величины с независимыми Q^*-знаками // Случайные эволюции: теоритические и прикладные задачи. Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992, С. 95 – 104.

[15] Торбін Г.М. Мультифрактальний аналіз сингулярно неперервних імовірнісних мір // Укр. Матем. Журн. – 2005. – **57.** – С. 837–857.

[16] Торбін Г.М. Про DP-властивості фрактальних ймовірнісних мір з незалежними Q-символами // Доповіді НАНУ. — 2008. № 4. — С. 44 – 50.

[17] А.Ф. Турбин, Н.В. Працевитый *Фрактальные множества, функции, распределения.* К.: Наукова думка,1992, 208 с.