Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2012, № 13(2).— С. 188–196.

УДК 517.5

Тополого-метричні та фрактальні властивості множин неповних сум знакододатних рядів одного класу

І. О. Савченко

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

Анотація. У даній роботі досліджуються тополого-метричні та фрактальні властивості множини неповних сум (підсум) ряду $\sum_{n=1}^{\infty} n\lambda^n$ з параметром $\lambda \in (0,1)$, отримані результати узагальнено на клас рядів $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\lambda^n$, де $f(n)$ — функція, для якої виконується умова

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1.$$

Знайдено міру Лебега і обчислено розмірність Хаусдорфа–Безиковича відповідних множин неповних сум.

Ключові слова: множина неповних сум ряду, фрактал, розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини.

Metric, topological and fractal properties of the set of the incomplete sums of the numerical series of one class

I. Savchenko,

National Pedagogical Dragomanov University

Abstract. The article is devoted to the investigation of metric, topological and fractal properties of the set of the incomplete sums of the numerical series $\sum_{n=1}^{\infty} n\lambda^n$ with the parameter $\lambda \in (0,1)$. The results are extended for the class of series $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\lambda^n$, where $f(n)$ — the functions with the conditions:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1.$$

The Lebesgue measure and Hausdorff dimension of the given sets are calculated.

AMS Subject Classifications (2010): 28A78, 28A80.

Key words: set of the incomplete sums of the series, fractal, Hausdorff dimension.

Вступ

Нехай

$$r_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + r_n \tag{1}$$

— збіжний знакододатний ряд.

Означення 1. Число

$$x = x(M) = \sum_{n \in M \subset \mathbb{N}} a_n$$

називається *неповною сумою ряду* (1). Іншими словами, кожне число

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n,$$

де $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$ називається *неповною сумою ряду* (1).

Зрозуміло, що всі частинні суми S_m і залишки r_m ряду (1) є його неповними сумами.

Означення 2. Множина

$$\Delta' = \left\{ x : x = \sum_{n \in M \subset \mathbb{N}} a_n,\ M \in 2^{\mathbb{N}} \right\}, \tag{2}$$

де $2^{\mathbb{N}}$ — множина всіх підмножин множини $\mathbb{N}$, називається *множиною неповних сум ряду* (1).

Множина неповних сум ряду (1) є досконалою множиною [**2**]. Тополого-метричні властивості множини неповних сум суттєво залежать від швидкості збіжності ряду і виражаються в термінах членів та залишків ряду. Для ряду (1), у якого $a_n \geq a_{n+1}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ у роботі [**7**] виділено 5 різних випадків:

1) $a_n > r_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$;
2) $a_n \leq r_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$;
3) $a_n > r_n$ для скінченної множини значень n;
4) $a_n \leq r_n$ для скінченної множини значень n;
5) $a_n > r_n$ і $a_n \leq r_n$ виконуються нескінченну кількість разів.

У випадках 1 і 4 Δ' є ніде не щільно множиною, яка може бути як нуль-множиною Лебега, так і множиною додатної міри; у випадку 2 $\Delta' = [0, r_0]$; у випадку 3 множина неповних сум Δ' є скінченним об'єднанням відрізків [**2**]; а у випадку 5 Δ' може бути як ніде не щільною множиною, так і може містити цілі відрізки.

На сьогодні невідомі необхідні й достатні умови нуль-мірності (в розумінні міри Лебега) множини Δ'. Ще менш досліджено фрактальні властивості множини неповних сум, хоча для певних класів рядів це зроблено в [**1**] – [**9**].

Дана робота присвячена дослідженню тополого-метричних та фрактальних властивостей множини неповних сум ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\lambda^n = \lambda + 2\lambda^2 + ... + n\lambda^n + ..., \tag{3}$$

де λ — фіксоване дійсне число з $(0, 1)$. Результати узагальнюються на клас рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)\lambda^n$, де $f(n)$ — функція, для якої виконується умова:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1. \tag{4}$$

1. Множини неповних сум рядів однієї континуальної однопараметричної сім'ї

Займемося вивченням властивостей множини неповних сум ряду (3). Відшукаємо його суму $r_0 = \lim\limits_{m\to\infty} S_m$, де $S_m = \sum_{n=1}^{m} n\lambda^n$ — послідовність його частинних сум. Запишемо різницю

$$S_m - \lambda S_m = \lambda + \lambda^2 + ... + m\lambda^m - m\lambda^{m+1} = \frac{\lambda(1-\lambda^m)}{1-\lambda} - m\lambda^{m+1}.$$

Звідки маємо

$$S_m = \frac{\lambda(1 - \lambda^m(1+m) + m\lambda^{m+1})}{(1-\lambda)^2}.$$

Спрямувавши $m \to \infty$, отримаємо

$$r_0 = \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}.$$

Отже, множина неповних сум ряду (3) належить відрізку $[0, \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}]$, але не завжди з ним співпадає. Вивчимо це питання детально.

Для подальшого вивчення властивостей нам знадобляться залишки ряду і циліндричні множини (циліндри та циліндричні множини).

Залишки ряду (3) мають вигляд

$$r_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} n\lambda^n = r_0 - S_m = \frac{\lambda^{m+1}(1 + m(1-\lambda))}{(1-\lambda)^2}.$$

Означення 3. Нехай $(c_1, c_2, ..., c_m)$ — фіксований набір нулів та одиниць. *Циліндром рангу m з основою* $c_1c_2...c_m$ ($c_i \in \{0, 1\}$) називається множина $\Delta'_{c_1...c_m}$, яка містить всі неповні суми ряду (1) виду

$$\sum_{n=1}^{m} c_n a_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} \varepsilon_n a_n, \text{де} \varepsilon_n \in \{0, 1\}.$$

Циліндричним відрізком рангу m з основою $c_1c_2...c_m$ $(c_i \in \{0,1\})$ називається відрізок

$$\Delta_{c_1...c_m} = [\inf \Delta'_{c_1...c_m},\ \sup \Delta'_{c_1...c_m}] = \left[\sum_{n=1}^{m} c_n a_n,\ r_m + \sum_{n=1}^{m} c_n a_n\right].$$

З означень випливають наступні властивості циліндричних множин.

1) $\Delta'_{c_1...c_m} \subset \Delta_{c_1...c_m}$, $\inf \Delta_{c_1...c_m} = \inf \Delta'_{c_1...c_m}$, $\sup \Delta_{c_1...c_m} = \sup \Delta'_{c_1...c_m}$.

2) $\Delta'_{c_1...c_m} = \Delta'_{c_1...c_m 0} \cup \Delta'_{c_1...c_m 1}$.

3) Довжина циліндра не залежить від його основи, а лише від рангу:

$$|\Delta'_{c_1...c_m}| = r_m \to 0\ (m \to \infty).$$

4) $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1...c_m} = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta'_{c_1...c_m} \equiv \Delta_{c_1...c_m...} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n a_n = x \in \Delta' \subset [0, r_0]$.

5) $\frac{|\Delta'_{c_1...c_m}|}{|\Delta'_{c_1...c_{m-1}}|} = \frac{r_m}{a_m + r_m} = \frac{1}{\delta_m + 1}$, де $\delta_m = \frac{a_m}{r_m}$.

6) $$\Delta_{c_1...c_m 0} \cap \Delta_{c_1...c_m 1} = \begin{cases} \left[\sum\limits_{n=1}^{m} c_n a_n + a_{m+1},\ \sum\limits_{n=1}^{m} c_n a_n + r_{m+1}\right], & \text{якщо } a_{m+1} < r_{m+1}; \\ \Delta_{c_1...c_m 011...1...} = \Delta_{c_1...c_m 10...0...}, & \text{якщо } a_{m+1} = r_{m+1}; \\ \varnothing, & \text{якщо } a_{m+1} > r_{m+1}. \end{cases}$$

7) $\Delta' \subset F_{m+1} \subset F_m\ \forall m \in \mathbb{N}$, де $F_m = \bigcup\limits_{(c_1...c_m)} \Delta_{c_1...c_m}$;

8) $\Delta' = \lim\limits_{m\to\infty} F_m = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \bigcup\limits_{(c_1...c_m)} \Delta_{c_1...c_m}$.

Розглянемо тепер деякі властивості циліндричних множин ряду (3).

Відрізки $\Delta_0 = [0,\ r_0 - \lambda] = [0,\ \frac{\lambda^2(2-\lambda)}{(1-\lambda)^2}]$ і $\Delta_1 = [\lambda,\ r_0] = [\lambda,\ \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}]$ є *циліндричними відрізками 1-го рангу.*

Якщо $\lambda \in \left(0,\ \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$, то $\Delta_0 \cap \Delta_1 = \varnothing$, якщо $\lambda \in \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2},\ 1\right)$, то $\Delta_0 \cap \Delta_1 \neq \varnothing$, якщо $\lambda_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$, то $\sup \Delta_0 = \inf \Delta_1$.

Відрізки

$$\Delta_{00} = \left[0,\ \frac{\lambda^3(3-2\lambda)}{(1-\lambda)^2}\right],\ \Delta_{01} = \left[2\lambda^2,\ \frac{\lambda^2(2-\lambda)}{(1-\lambda)^2}\right],$$
$$\Delta_{10} = \left[\lambda,\ \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2} - 2\lambda^2\right],\ \Delta_{11} = \left[\lambda + 2\lambda^2,\ \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}\right]$$

є *циліндричними відрізками 2-го рангу.*

Якщо $\lambda \in \left(0,\ \frac{7-\sqrt{17}}{8}\right)$, то $\Delta_{00} \cap \Delta_{01} = \varnothing$ і $\Delta_{10} \cap \Delta_{11} = \varnothing$; якщо $\lambda \in \left(\frac{7-\sqrt{17}}{8},\ 1\right)$, то $\Delta_{00} \cap \Delta_{01} \neq \varnothing$ і $\Delta_{10} \cap \Delta_{11} \neq \varnothing$, якщо $\lambda_2 = \frac{7-\sqrt{17}}{8}$, то $\sup \Delta_{00} = \inf \Delta_{01}$ і $\sup \Delta_{10} = \inf \Delta_{11}$.

Для кожного значення параметра $\lambda \in \left[\frac{2-\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ циліндричні відрізки $\Delta_{c_1c_2...c_m 0}$, $\Delta_{c_1c_2...c_m 1}$ перетинаються, а з деякого номеру рангу має місце $\Delta_{c_1c_2...c_m 0} \cap \Delta_{c_1c_2...c_m 1} = \varnothing$ для всіх $n > m$. При прямуванні λ до $\frac{1}{2}$ зліва ранг, з якого перекриття відрізків

$\Delta_{c_1c_2\ldots c_m0}$ та $\Delta_{c_1c_2\ldots c_m1}$ припиняється, стає більшим. При $\lambda \geq \frac{1}{2}$ циліндричні відрізки перетинаються з першого рангу.

У випадку, коли множина має нульову міру Лебега, більш тонко її масивність характеризують фрактальні міри і розмірності, зокрема міра Хаусдорфа і розмірність Хаусдорфа–Безиковича. Нагадаємо ці поняття.

Означення 4. Нехай $0 < \alpha$ — фіксоване дійсне число; *α–мірною мірою (α-мірою) Хаусдорфа обмеженої множини E простору R^1* називається

$$H^{\alpha}(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\inf_{|u_i| \leq \varepsilon} \left\{ \sum_i \mid u_i \mid^{\alpha} \colon \ \bigcup_i u_i \supset E \right\} \right],$$

де інфімум береться за всеможливими покриттями (u_i) множини E відрізками u_i, діаметри $\mid u_i \mid$ яких не перевищують ε. Число

$$\alpha_0(E) = \sup \{\alpha : \ H^{\alpha}(E) \neq 0\} = \inf \{\alpha : \ H^{\alpha}(E) = 0\}$$

називається *розмірністю Хаусдорфа–Безиковича множини E*. Вона характеризує масивність і «компактність» її точок, оскільки має властивості:

1) Якщо $E_1 \subset E_2$, то $\alpha_0(E_1) \leq \alpha_0(E_2)$; 2) $\alpha_0 \left(\bigcup_i E_i \right) = \sup_i \alpha_0(E_i)$.

Теорема 1 ([**7**]). *Якщо для ряду* (1) *умова $a_n \leq r_n$ виконується лише для скінченної множини значень n, то розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини Δ' неповних сум обчислюється за формулою*

$$\alpha_0(\Delta') = \left[\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{k} \log_2(\delta_n + 1) \right]^{-1}.$$

Наслідок 1. *Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{r_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = \delta$, то $\alpha_0(\Delta') = \log_2^{-1}(\delta_n + 1)$.*

Теорема 2. *Множина Δ' неповних сум ряду* (3) *є*

1) ніде не щільною множиною нульової міри Лебега при $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$, розмірність Хаусдорфа–Безиковича якої обчислюється за формулою

$$\alpha_0(\Delta') = -\log_\lambda 2;$$

2) відрізком $\left[0, \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}\right]$ при $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1)$.

Доведення. 1) Покажемо, що нерівність $r_n > a_n$ виконується скінченну кількість разів при $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$, тобто існує таке $N_\lambda \in \mathbb{N}$, що нерівність $a_n > r_n$ виконується для всіх $n \geq N_\lambda$. Розв'яжемо нерівність

$$\frac{\lambda^{n+1}}{(1-\lambda)^2}(n(1-\lambda) + 1) < n\lambda^n$$

відносно n:

$$n > \frac{\lambda}{2\lambda^2 - 3\lambda + 1} = \frac{\lambda}{2(1-\lambda)(\frac{1}{2}-\lambda)}.$$

Легко побачити, що остання нерівність виконується з деякого номеру N_λ, що означає $\Delta_{c_1\ldots c_n 0} \cap \Delta_{c_1\ldots c_n 1} = \varnothing$ для всіх $n \geq N_\lambda$.

Множина Δ' міститься в 2^n циліндрах довжини r_n, тому міра Лебега

$$\mu(\Delta') \leq \lim_{n\to\infty} r_n 2^n = \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2} \lim_{n\to\infty} (2\lambda)^n (1 + n(1-\lambda)) = 0.$$

Отже, Δ' є ніде не щільною нуль-множиною.

Відношення

$$\delta_n = \frac{(1-\lambda)^2}{\lambda(1-\lambda) + \frac{\lambda}{n}} \to \frac{1-\lambda}{\lambda} \quad (n \to \infty).$$

Тому за наслідком теореми 2 розмірність Хаусдорфа–Безиковича множин Δ' дорівнює $\alpha_0(\Delta') = -\log_\lambda 2$.

2) Покажемо, що $r_n - a_n > 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ при $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1)$:

$$\frac{\lambda^{n+1}(1 + n(1-\lambda)) - n\lambda^n(1-\lambda)^2}{(1-\lambda)^2} = \frac{\lambda^n(n(2\lambda-1)(1-\lambda)+\lambda)}{(1-\lambda)^2} > 0.$$

Отже, $\Delta_{c_1\ldots c_n 0} \cap \Delta_{c_1\ldots c_n 1} \neq \varnothing$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тому множина Δ' є відрізком. $\square$

Проведемо аналогічні дослідження множини неповних сум ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\lambda^n = \lambda + 4\lambda^2 + 9\lambda^3 + \ldots + n^2\lambda^n + \ldots \,. \tag{5}$$

Знаходимо його суму:

$$S_n - \lambda S_n = \lambda + 3\lambda^2 + \ldots + (2n-1)\lambda^n - n^2\lambda^{n+1} =$$

$$2(\lambda + 2\lambda^2 + \ldots + n\lambda^n) - (\lambda + \lambda^2 + \ldots + \lambda^n) - n^2\lambda^{n+1} =$$
$$\frac{2\lambda(1 - \lambda^n(1+n) + n\lambda^{n+1})}{(1-\lambda)^2} - \frac{\lambda(1-\lambda^n)}{1-\lambda} - n^2\lambda^{n+1},$$

звідки маємо

$$S_n = \frac{\lambda(1-\lambda^n)(1+n)}{(1-\lambda)^3} - \frac{2n\lambda^{n+1}}{(1-\lambda)^2} - \frac{n^2\lambda^{n+1}}{1-\lambda}.$$

Спрямувавши $n \to \infty$, отримаємо

$$r_0 = \frac{\lambda(1+\lambda)}{(1-\lambda)^3},$$

знаходимо залишки ряду

$$r_n = \frac{\lambda^{n+1}(1 + \lambda + 2n(1-\lambda) + n^2(1-\lambda)^2)}{(1-\lambda)^3}.$$

Відношення

$$\delta_n = \frac{(1-\lambda)^3}{\lambda(1-\lambda)^2 + \frac{2\lambda(1-\lambda)}{n} + \frac{\lambda(1-\lambda)}{n^2}} \to \frac{1-\lambda}{\lambda}$$

при $n \to \infty$.

Отже, маємо наступну теорему, яка доводиться аналогічно попередній.

Теорема 3. *Множина* Δ' *неповних сум ряду* (5) *є*

1) ніде не щільною множиною нульової міри Лебега при $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$, *розмірність Хаусдорфа–Безиковича якої обчислюється за формулою*

$$\alpha_0(\Delta') = -\log_\lambda 2;$$

2) відрізком $[0, \frac{\lambda}{1-\lambda^2}]$ *при* $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1)$.

2. Множина неповних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\lambda^n$

Узагальнимо клас рядів, множини неповних сум мають «подібні» топологометричні та фрактальні властивості.

Нехай $f(n)$ — функція, для якої виконується умова (4). Займемося вивченням властивостей множини неповних сум ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)\lambda^n$, яку позначимо через Δ'_f.

Лема 1. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)\lambda^n$ *є збіжним.*

Доведення. Скористаємося ознакою Даламбера:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)\lambda^{n+1}}{f(n)\lambda^n} = \lambda < 1.$$

Отже, даний ряд є збіжним. □

Наслідок 2. *Якщо функція* $f(n)$ *задовольняє умову* (4), *то для довільного* $\lambda \in (0,1)$ *має місце рівність*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^n f(n) = 0.$$

Теорема 4. *Множина* Δ'_f *є*

1) ніде не щільною множиною нульової міри Лебега при $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$, *розмірність Хаусдорфа–Безиковича якої обчислюється за формулою*

$$\alpha_0(\Delta'_f) = -\log_\lambda 2;$$

2) об'єднанням відрізків при $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1)$.

Доведення. 1) Покажемо, що умова (4) рівносильна умові

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n+k)}{f(n)} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Перепишемо останню границю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n+k)}{f(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(n+k)\cdot f(n+k-1)\cdot\ldots\cdot f(n+2)\cdot f(n+1)}{f(n+k-1)\cdot f(n+k-2)\cdot\ldots\cdot f(n+1)\cdot f(n)}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{f(n+1)}{f(n)}=1.$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n=\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)\lambda^n}{f(n+1)\lambda^{n+1}+f(n+2)\lambda^{n+2}+\ldots}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^n}{\lambda^n(\frac{f(n+1)}{f(n)}\lambda+\frac{f(n+2)}{f(n)}\lambda^2+\ldots)}=\frac{1-\lambda}{\lambda},$$

то при $\lambda<\frac{1}{2}$ нерівність $\delta_n\le 1$ виконується скінченну кількість разів. Тому множина Δ'_f є ніде не щільною. За властивістю напівадитивності міри Лебега маємо

$$\mu(\Delta'_f)\le\lim_{n\to\infty}2^n r_n=\lim_{n\to\infty}2^n(f(n+1)\lambda^{n+1}+f(n+2)\lambda^{n+2}+\ldots)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}f(n)(2\lambda)^n(\lambda+\lambda^2+\ldots+\lambda^n+\ldots)=\frac{\lambda}{1-\lambda}\lim_{n\to\infty}a^n f(n),$$

де $a\in(0,1)$. За наслідком 2 границя $\lim\limits_{n\to\infty}a^n f(n)=0$. Тому, $\mu(\Delta'_f)=0$.

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n=\frac{1-\lambda}{\lambda}$, то згідно наслідку 1 розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини Δ'_f дорівнює $\alpha_0(\Delta'_f)=-\log_\lambda 2$.

2) При $\lambda\in[\frac{1}{2},1)$ нерівність $\delta_n>1$ виконується лише скінченну кількість разів, тому множина Δ'_f є об'єднанням скінченного числа відрізків. $\square$

Наслідок 3. *Однакову розмірність Хаусдорфа–Безиковича мають множини неповних сум таких рядів:*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}g(n)\lambda^n$, *де* $g(n)$ *— монотонна й обмежена;*

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^\alpha\lambda^n$, $\alpha\in\mathbb{R}$*;*

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(n)\lambda^n$.

Умова (4) не виконується для наступних функцій:

1) $f(n)=n^n$; 2) $f(n)=n!$; 3) $f(n)=a^n$, де $a>1$.

Література

[1] *Albeverio S., Torbin G.* Image measures of infinite product measures and generalized Bernoulli convolutions // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2004. — №5. — С. 248-264.

[2] *Kakeya S.* On the partial sums of an infinite series // Tohoku Sci Rep. — 1914. — 3. no. 4. — P. 159–164.

[3] *Pratsiovytyi M. V., Feshchenko O. Yu.* Topological, metric and fractal properties of probability distributions on the set of incomplete sums of positive series // Theory of Stochastic Processes. — 2007. — 13 (29). №1-2, — P. 205–224.

[4] *Гончаренко Я. В.* Згортки розподілів сум випадкових рядів спеціального виду // Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — № 4, 2003. — С. 216–232.

[5] *Гончаренко Я. В., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Тополого-метричні і фрактальні властивості множини неповних сум знакододатного ряду та розподілів на ній // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2005, № 6. — С. 210–224.

[6] *Гончаренко Я. В., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Фрактальні властивості деяких згорток Бернуллі // Теорія ймовір. та матем. статист. — 2008, Вип. 79. — С. 34 – 49.

[7] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296с.

[8] *Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Один клас випадкових величин типу Джессена-Вінтнера // Доп. НАН України. — 1998. — №4. — С. 48-54.

[9] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук. думка, 1992. — 208 с.

References

[1] Albeverio S., Torbin G., *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1: Fiz-mat. nauky (Transactions of Dragomanov National Pedagogical University. Series 1: Phys.- Math. Sciences)*, 2004, №5, pp. 248–264.

[2] Kakeya S., *Tohoku Sci Rep.*, 1914, **3**, №4, pp. 159–164.

[3] Pratsiovytyi M. V., Feshchenko O. Yu., *Theory of Stochastic Processes*, 2007, **13 (29)**, №1-2, pp. 205–224.

[4] Goncharenko Ya., *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1: Fiz-mat. nauky (Transactions of Dragomanov National Pedagogical University. Series 1: Phys.- Math. Sciences)*, 2003, № 4, pp. 216–232.

[5] Goncharenko Ya., Pratsiovytyi M., Torbin G., *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1: Fiz-mat. nauky (Transactions of Dragomanov National Pedagogical University. Series 1: Phys.- Math. Sciences)*, 2005, № 6, pp. 210–224.

[6] Goncharenko Ya., Pratsiovytyi M., Torbin G., *Prob. Theory and Math. Statist.*, 2008, **79**, pp. 34 – 49.

[7] Pratsiovytyi M., *Fraktalnyi pidhid u doslidzhennjah synguljarnyh rozpodiliv (Fractal approach to investigations of singular distributions)*, 1998, 296 p.

[8] Pratsiovytyi M., Torbin G., *Dopovidi NAN Ukrainy (Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine)*, 1998, №4, pp. 48–54.

[9] Turbin A., Pratsiovytyi M., *Fraktalnye mnozhestva, funkcii, rasspredeleniya (Fractal sets, functions and distributions)*, 1992, 208 p.