Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2012, № 13 (2).— С. 179–187.

УДК 517.928

Асимптотичні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з відхиленням аргументу

М. О. Рашевський,

Державний вищий навчальний заклад «Криворізький національний університет»

Ключові слова: лінійні диференціальні рівняння, диференціальні рівняння другого порядку, диференціальні рівняння з відхиленням аргументу, асимптотичний розв'язок.

Asymptotic solutions of the second order linear differential equations with delay

M. Rashevsky,

State institution of higher education ≪Kryvyi Rih National University≫

AMS Subject Classifications (2010): 35A35.

Key words: linear differential equations, asymptotic solution, differential equation with delay.

Питання про асимптотичне інтегрування рівняння

$$\varepsilon^2\frac{d^2x}{dt^2}+\varepsilon b(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt}+a(t,\varepsilon)x(t)+d(t,\varepsilon)x(t-\Delta(t),\varepsilon)=f(t) \qquad (1)$$

вивчалось багатьма дослідниками у різних припущеннях про коефіцієнти $a(t,\varepsilon)$, $b(t,\varepsilon)$ та $d(t,\varepsilon)$, що зображуються збіжними рядами за степенями дійсного малого параметра $\varepsilon>0$:

$$a(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k a_k(t),\quad b(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k b_k(t),\quad d(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k d_k(t)$$

на проміжку $[0,L]$. Тут $x(t,\varepsilon)$ — невідома функція, $\Delta(t)>0$ — відхилення аргументу (ВА). Основна початкова задача для рівняння (1) у випадку запишеться як

$$x(t,\varepsilon)=\varphi(t,\varepsilon);\quad t\in[-\Delta,0]. \qquad (2)$$

Вимагатимемо виконання таких умов

1°. Коефіцієнти $a_k(t)$, $b_k(t)$ та $d_k(t)$ є нескінченно диференційовними на проміжку $[0,L]$, $k\le 0$.

E-mail: nvr1701@gmail.com

2°. Корені характеристичного рівняння $\lambda^2 + b_0(t)\lambda + a_0(t) = 0$ є різними для $t \in (0, L]$, і $\lambda_1(0) = \lambda_2(0) = a$.

Коефіцієнт $b(t,\varepsilon)$ для однорідних звичайних диференціальних рівнянь знищується підстановкою $x(t,\varepsilon) = \exp\Big\{-\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t b(s,\varepsilon)ds\Big\}z(t,\varepsilon)$. Рівняння (1) навіть однорідне в результаті записаної підстановки набуде доданку із множником, що має необмежену (при $\varepsilon \to 0$) похідну:

$$\varepsilon^2\frac{d^2z}{dt^2} + p(t,\varepsilon)z(t,\varepsilon) + q(t,\varepsilon)\exp\Big\{\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_t^{t-\Delta(t)} b(s,\varepsilon)ds\Big\}z(t-\Delta(t),\varepsilon) = 0.$$

У зв'язку з розв'язанням прикладних задач рівняння з ВА при умові стабільності спектру граничного оператора [3] вивчалися багатьма дослідниками [1, 4, 6]. Рівняння з ВА із нестабільним спектром, і зокрема з точками повороту (ТП), інша назва — точки звороту, досліджувалися останнім часом [2]. У цій роботі методами [1, 3, 6, 8] побудовано асимптотичні розв'язки рівняння (1) зі сталим ВА.

I. Нехай виконується умова

$$b(t,\varepsilon) \equiv 0. \tag{3}$$

Нестабільність спектру при цьому є наслідком виконання такої умови

3°. $a_0(t) = ta(t),\ a(t) > 0$.

Умова 3° припускає наявність простої ТП $t = 0$. У припущенні, що ВА $\Delta > 0$ є сталим, будемо розв'язувати задачу (1), (2) методом кроків [6]. На r-му кроці ($t \in [(r-1)\Delta, r\Delta]$) рівняння (1) набуде вигляду

$$\varepsilon^2\frac{d^2x}{dt^2} + a(t,\varepsilon)x(t) = F_r(t), \tag{4}$$

де, зокрема, на першому кроці $F_1(t) = f(t) - d(t,\varepsilon)\varphi(t-\Delta,\varepsilon)$. До останнього рівняння поставимо задачу Коші

$$x(0,\varepsilon) = \varphi(0,\varepsilon), \quad \varepsilon x'(0,\varepsilon) = \varphi'(0.\varepsilon), \tag{5}$$

і застосуємо методи [3, 5]. Побудуємо розв'язок рівняння у вигляді

$$X_1(t,\varepsilon) = x_{11}(t,\varepsilon) + x_{21}(t,\varepsilon) + z_1(t,\varepsilon), \tag{6}$$

де $x_{i1}(t,\varepsilon) = \Big(\sum\limits_{j=-2}^{\infty}\varepsilon^{\frac{j}{3}}\nu_{i1}^j(t)\Big)u_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\zeta(t)) + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\Big(\sum\limits_{j=-2}^{\infty}\varepsilon^{\frac{j}{3}}w_{i1}^j(t)\Big)u_i'(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\zeta(t))$ та $\zeta(t) = \Big(\frac{3}{2}\int\limits_0^t\sqrt{a_0(s)}ds\Big)^{\frac{2}{3}}$, $u_i(t)$ — функції Ейрі [3; 5], $i = 1, 2$. Коефіцієнти записаних рядів визначаються згідно з [5] із диференціальних рівнянь. Зокрема,

$$\nu_{i1}^0(t) = \frac{1}{\sqrt{\zeta'(t)}}\mathrm{ch}\Big(\int\limits_0^t\alpha(s)ds\Big),\ w_{i1}^0(t) = \frac{1}{\sqrt{\zeta(t)\zeta'(t)}}\mathrm{sh}\Big(\int_0^t\alpha(s)ds\Big),\ \alpha(t) = \frac{a_1(t)}{2\sqrt{a_0(t)}}.$$

Вказані коефіцієнти будуватимемо так, щоб задовольнити початкову умову:

$$x_{11}(0,\varepsilon) + x_{21}(0,\varepsilon) + z_1(0,\varepsilon) = \varphi(0,\varepsilon),$$
$$x'_{11}(0,\varepsilon) + x'_{21}(0,\varepsilon) + z'_1(0,\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\varphi'(0,\varepsilon).$$

Для цього необхідно визначити останній доданок у (6). Використаємо метод [3]. Увівши регуляризуючу змінну $\tau = \varepsilon^{-\frac{2}{3}}\zeta(t)$, будуємо невідому функцію у вигляді $z_1(t,\varepsilon) \equiv z_1(t,\tau,\varepsilon) = \sum\limits_{j=-2}^{\infty} \varepsilon^{\frac{j}{3}} g_j^1(t,\tau,)$ дістаючи систему рівнянь для невідомих g_j^1 :

$$\begin{aligned}
&(\zeta'(t))^2 L_0 g_{-2}^1(t,\tau) = F_1(t);\\
&(\zeta'(t))^2 L_0 g_{-1}^1(t,\tau) = -a(t) g_{-2}^1(t,\tau);\\
&(\zeta'(t))^2 L_0 g_0^1(t,\tau) = -a_1(t) g_{-1}^1(t,\tau) - 2\zeta'(t)\frac{\partial^2 g_{-2}^1}{\partial t \partial \tau} + \zeta''(t)\frac{\partial g_{-2}^1}{\partial \tau};\\
&\dots\\
&(\zeta'(t))^2 L_0 g_k^1(t,\tau) = F(t, g_{-2}^1, g_{-1}^1, \dots, g_{k-1}^1),\ k \geq 1.
\end{aligned} \tag{7}$$

Тут $L_0 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \tau u$, $F(t, g_{-2}^1, \dots, g_{k-1}^1)$ — лінійна функція аргументів $g_{-2}^1, \dots, g_{k-1}^1$. Частинний розв'язок першого з рівнянь системи (7) запишеться як $g_{-2}^1(t,\tau) = H(t)\int_{-\infty}^{\tau} K(\tau,s)ds$, де $H(t) = (\zeta'(t))^{-2}F_1(t)$; $K(\tau,s) = u_2(\tau)u_1(s) - u_1(\tau)u_2(s)$. Частинний розв'язок другого з рівнянь системи (8) є $g_{-1}^1(t,\tau) = -(\zeta'(t))^{-2}a_1(t)g_{-2}^1(t,\tau)$, або детальніше $g_{-1}^1(t,\tau) = -(\zeta'(t))^{-2}a_1(t)H(t)\int_{-\infty}^{\tau} K(\tau,s)\int_{-\infty}^{s} K(\tau,s_1)\,ds\,ds_1$. Отже, розв'язки перших двох рівнянь містять функції Ейрі під знаками інтегралів, які не спрощуються і обчислюються асимптотичними методами. Подібні інтеграли з'являються при інтегруванні майже діагональних систем багатофазовим методом В. В. Кученка, описаного в [5]. Послідовно із системи (8) дістанемо всі доданки суми $z_1(\tau,t,\varepsilon)$. Зокрема,

$$g_0^1(t,\tau) = -(\zeta'(t))^{-2}a_1(t)H(t)\int_{-\infty}^{\tau} K(\tau,s)\int_{-\infty}^{s} K(\tau,s_1)\int_{-\infty}^{s_1} K(\tau,s_2)\,ds\,ds_1\,ds_2,$$

а вираз для $g_k^1(t,\tau)$ зображується у вигляді $r+3$-кратного інтегралу.

Побудований формальний розв'язок у загальному випадку є необмеженим при $\varepsilon \to 0$. Наявність доданків $\nu_{i1}^{-2}(t), w_{i1}^{-2}(t), \nu_{i1}^{-1}(t), w_{i1}^{-1}(t)$ компенсує доданки $g_{-2}^1(t,\tau)$ та $g_{-1}^1(t,\tau)$ з від'ємними степенями ε, і надає можливість задовольнити початкові умови (5). Лише у випадку $F_1(0) = 0$ або при спеціальних початкових умовах

$$x(0,\varepsilon) = \frac{\alpha}{\varepsilon^{\frac{2}{3}}} + \frac{\beta}{\varepsilon^{\frac{1}{3}}} + x^0, \quad x'(0,\varepsilon) = \frac{\gamma}{\varepsilon^{\frac{4}{3}}} + \frac{\delta}{\varepsilon} + \frac{x^1}{\varepsilon^{\frac{2}{3}}}$$

дістанемо розв'язок рівняння (4), а отже і (1), обмежений в околі $\varepsilon = 0$, оскільки тоді $\nu_{i1}^{-2}(t) \equiv w_{i1}^{-2} \equiv \nu_{i1}^{-1} \equiv w_{i1}^{-1}(t) \equiv 0$. Міркуваннями [3, ст. 210] доводиться наступне твердження.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови* 1°, 3°, *(3), то рівняння (4) має формальний розв'язок (6). При цьому* $3m$ *— наближення, отримане з (6), яке задовольняє умовам (5), є таким, що*

$$|x^{(k)}(t,\varepsilon) - x^{(k)}_{3m}(t,\varepsilon)| \le C\varepsilon^m,$$

де $x(t,\varepsilon)$ *— точний розв'язок задачі (4), (5),* $k=1,2$.

Сформульоване твердження рівносильне наступному.

Якщо виконуються умови 1°, 3°, *(3), то рівняння (1) на першому кроці (*$t\in[0,\Delta]$*) має розв'язок, який можна записати у вигляді*

$$X(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{2}\Big(\sum_{j=-2}^{3m}\varepsilon^{\frac{j}{3}}\nu^j_{i1}(t)\Big)u_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\zeta(t)) + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\Big(\sum_{j=-2}^{3m}\varepsilon^{\frac{j}{3}}w^j_{i1}(t)\Big)u'_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\zeta(t)) + \\ + \sum_{j=-2}^{3m}\varepsilon^{\frac{j}{3}}g^1_j(t) + \varepsilon^m\alpha_{m1}(t,\varepsilon),$$

де $\alpha_{m1}(t,\varepsilon)$ *— рівномірно обмежена в околі* $\varepsilon=0$ *функція.*

На другому кроці ($t\in[\Delta,2\Delta]$) рівняння (4) запишеться у вигляді

$$\varepsilon^2\frac{d^2x}{dt^2} + a(t,\varepsilon)x(t) = F_2(t,\varepsilon),$$

де

$$F_2(t,\varepsilon) = f(t) - d(t,\varepsilon)\Big(\sum_{i=1}^{2}\Big(\sum_{j=-2}^{3m}\varepsilon^{\frac{j}{3}}\nu^j_{i1}(t-\Delta)\Big)u_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\zeta(t-\Delta)) + \\ + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\Big(\sum_{j=-2}^{3m}\varepsilon^{\frac{j}{3}}w^j_{i1}(t-\Delta)\Big)u'_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\zeta(t-\Delta))\Big) + d(t,\varepsilon)z_1(t-\Delta,\varepsilon) + \varepsilon^{m+\frac{1}{3}}\alpha_{m1}(t,\varepsilon).$$

Для рівняння (4) маємо початкові умови:

$$x(\Delta,\varepsilon) = x_{11}(\Delta,\varepsilon)+x_{21}(\Delta,\varepsilon)+z_1(\Delta,\varepsilon), \quad x'(\Delta,\varepsilon) = x'_{11}(\Delta,\varepsilon)+x'_{21}(\Delta,\varepsilon)+z'_1(\Delta,\varepsilon). \tag{8}$$

Припустивши, що на проміжку $[\Delta,2\Delta]$ відсутні ТП та «резонанси» [8], що гарантується виконанням умови 3° та умови

4°. $a(t,0)\ne a(t-\Delta,0)$,

розв'язок записаного рівняння будуватимемо у вигляді

$$X_2(t,\varepsilon) = C_{12}x_{12}(t,\varepsilon) + C_{22}x_{22}(t,\varepsilon) + \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=-2}^{3(m-1)}\varepsilon^{\frac{j}{3}}\nu^j_{i2}(t-\Delta)\right)u_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\zeta(t-\Delta)) + \\ + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\left(\sum_{j=-2}^{3(m-1)}\varepsilon^{\frac{j}{3}}w^j_{i2}(t-\Delta)\right)u'_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\zeta(t-\Delta)) + z_2(t,\varepsilon), \tag{9}$$

де $x_{i2}(t,\varepsilon)=\left(\sum\limits_{k=0}^{m-1}\varepsilon^k u_{k2}^i(t)\right)\exp\left\{\varepsilon^{-1}\int\limits_{\Delta}^{t}\lambda_{i2}(s,\varepsilon)ds\right\}$ — загальний розв'язок однорідного рівняння, який при виконанні умов 3° та 4° будується методом [8]. Невідомі частинні розв'язки, що відповідають доданкам правої частини, знайдемо, прирівнюючи коефіцієнти в тотожностях

$$\varepsilon^2\sum_{j=-2}^{3m}\varepsilon^{\frac{j}{3}}{\nu_{i2}^j}''-\sum_{j=-2}^{3m}\varepsilon^{\frac{j}{3}}\nu_{i2}^j\zeta(\zeta')^2-2\varepsilon\sum_{j=-2}^{3m}\varepsilon^{\frac{j}{3}}{w_{i2}^j}'\zeta'\zeta-\varepsilon\sum_{j=-2}^{3m}\varepsilon^{\frac{j}{3}}w_{i2}^j(\zeta'\zeta)'+$$

$$+a(t,\varepsilon)\sum_{j=-2}^{3m}\varepsilon^{\frac{j}{3}}\nu_{i2}^j=d(t,\varepsilon)\sum_{j=-2}^{3m}\varepsilon^{\frac{j}{3}}\nu_{i1}^j;$$

$$2\varepsilon\sum_{j=-2}^{3m}\varepsilon^{\frac{j}{3}}{\nu_{i2}^j}'\zeta'+\varepsilon\sum_{j=-2}^{3m}\varepsilon^{\frac{j}{3}}\nu_{i2}^j\zeta''+\varepsilon^2\sum_{j=-2}^{3m}\varepsilon^{\frac{j}{3}}{w_{i2}^j}''-\sum_{j=-2}^{3m}\varepsilon^{\frac{j}{3}}w_{i2}^j\zeta(\zeta')^2+$$

$$+a(t,\varepsilon)\sum_{j=-2}^{3m}\varepsilon^{\frac{j}{3}}w_{i2}^j=d(t,\varepsilon)\sum_{j=-2}^{3m}\varepsilon^{\frac{j}{3}}w_{i1}^j.$$

Всі незаписані аргументи в тотожностях є $t-\Delta$. З урахуванням рівності $\zeta(s)(\zeta'(s))^2=a(s,0)$ та умови 4° знайдемо

$$\nu_{i2}^{-2}=\frac{d(t,\varepsilon)\nu_{i1}^{-2}}{a(t,0)-a(t-\Delta,0)},\quad w_{i2}^{-2}=\frac{d(t,\varepsilon)w_{i1}^{-2}}{a(t,0)-a(t-\Delta,0)}.$$

Із аналогічних рівностей визначаються інші коефіцієнти суми.

Нарешті невідомий доданок $z_2(t,\varepsilon)=\sum\limits_{j=-2}^{3(m-1)}\varepsilon^{\frac{j}{3}}g_2^j(t)$ знайдемо, підставивши (9) у (4) та прирівнявши коефіцієнти при степенях ε у виразі

$$\varepsilon^2\sum_{j=-2}^{3(m-1)}\varepsilon^{\frac{j}{3}}\frac{d^2g_2^j(t)}{dt^2}+a(t,\varepsilon)\sum_{j=-2}^{3(m-1)}\varepsilon^{\frac{j}{3}}g_2^j(t)=f(t)-d(t,\varepsilon)\sum_{j=-2}^{3m}\varepsilon^{\frac{j}{3}}g_1^j(t-\Delta),$$

звідки дістанемо

$$g_2^{-2}(t)=\frac{f(t)-d_0(t)g_1^{-2}(t-\Delta)}{a_0(t)},\ldots,$$

$$g_2^k(t)=\frac{-\sum_{l+\frac{p}{3}=\frac{k}{3}}d_l(t)g_1^p(t-\Delta)-\sum_{l+\frac{p}{3}=\frac{k}{3}}\delta_{l0}a_l(t)g_1(t-\Delta)-\frac{d^2g_2^{k-2}(t)}{dt^2}}{a_0(t)},$$

$-1\le k\le 3(m-1)$. Таким чином побудуємо всі невідомі доданки виразу (9). Значення сталих C_{12}, C_{22} обчислюємо з умови (8). В загальному випадку залежність довільних сталих від ε є сингулярною. Сформулюємо наступне твердження.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови* 1°, 3°, 4°, *(3), то рівняння (4) має формальний розв'язок (9) такий, що для деякого точного розв'язку* $x(t,\varepsilon)$ *задачі (4),* *(8) справджується нерівність*

$$|X^{(k)}(t,\varepsilon) - x^{(k)}(t,\varepsilon)| \le C\varepsilon^{m-1}.$$

Твердження теореми 2 рівносильне такому.

Якщо виконуються умови 1°, 3°, 4°, *(3), то рівняння (1) на другому кроці* ($t \in [\Delta, 2\Delta]$) *має розв'язок, який можна записати у вигляді*

$$X(t,\varepsilon) = X_2(t,\varepsilon) + \varepsilon^{m-1}\alpha_{m2}(t,\varepsilon),$$

де функція $\alpha_{m2}(t,\varepsilon)$ *є рівномірно обмеженою в околі* $\varepsilon = 0$.

Вимагаючи на r-му кроці ($t \in [(r-1)\Delta, r\Delta]$) відсутності «резонансу», що забезпечуватиметься виконанням умови

5°. $a(t,0) \neq a(t-(r-1)\Delta, 0)$, методом математичної індукції можна довести теорему.

Теорема 3. *Якщо виконуються умови* 1°, 3°, 4°, 5°, *(3), то рівняння (1) на на* r*-му кроці* ($t \in [(r-1)\Delta, r\Delta]$) *має розв'язок, який можна записати у вигляді*

$$X(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{2} C_{ir}\left(\sum_{k=0}^{m-r}\varepsilon^k u_{kr}^i(t)\right)\exp\left\{\varepsilon^{-1}\int_{(r-1)\Delta}^{t}\lambda_{ir}(s,\varepsilon)ds\right\} +$$
$$+\sum_{j=1}^{r-1}(R_{j1}(t,\varepsilon)x_{1j} + R_{j2}(t,\varepsilon)x_{2j}) + z_r(t,\varepsilon) + \varepsilon^{m-1-r}\alpha_{mr}(t,\varepsilon) +$$
$$+\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=-2}^{3(m-r)}\varepsilon^{\frac{j}{3}}\nu_{ir}^{j}(t-(r-1)\Delta)\right)u_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\zeta(t-(r-1)\Delta)) +$$
$$+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\left(\sum_{j=-2}^{3(m-r)}\varepsilon^{\frac{j}{3}}w_{i2}^{j}(t-(r-1)\Delta)\right)u_i'(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\zeta(t-(r-1)\Delta)),$$

де $\alpha_{mr}(t,\varepsilon)$ *— рівномірно обмежена в околі* $\varepsilon = 0$ *функція.*

II. Метод кроків, застосований вище є неефективним у випадку малого ВА. В роботах [1, 7] розроблено метод інтегрування систем першого порядку з малим ВА. Розглянемо рівняння (1) з малим сталим ВА $\Delta(t) = \varepsilon\Delta$:

$$\varepsilon^2\frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon b(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} + a(t,\varepsilon)x(t) + d(t,\varepsilon)x(t-\varepsilon\Delta) = f(t). \qquad (10)$$

Основна початкова задача для рівняння (10) запишеться як

$$x(t,\varepsilon) = \varphi(t); \quad t \in [-\varepsilon\Delta, 0]. \qquad (11)$$

Вимагатимемо, щоб в умові 2° $Re a < 0$. Розв'язок рівняння (10) будуватимемо у вигляді

$$x(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k(y_k(t)+\Pi_k z(\tau));\quad \tau=\frac{t}{\varepsilon}. \tag{12}$$

Підставивши (12) у (10) у припущенні, що функції $y_k(t-\varepsilon\Delta)$ можна зобразити у вигляді ряду за степенями ВА $y_k(t-\varepsilon\Delta)=\sum\limits_{p=0}^{\infty}\frac{y_k^p(t)}{p!}(-\varepsilon\Delta)^p$ та прирівнявши коефіцієнти при степенях ε у виразах

$$\varepsilon^2\frac{d^2y}{dt^2}+\varepsilon b(t,\varepsilon)\frac{dy}{dt}+a(t,\varepsilon)y(t)+d(t,\varepsilon)y(t-\varepsilon\Delta)=f(t);$$
$$\frac{d^2\Pi z(\tau)}{d\tau^2}+b(\varepsilon\tau,\varepsilon)\frac{d\Pi z(\tau)}{d\tau}+a(\varepsilon\tau,\varepsilon)\Pi z(\tau)+d(\varepsilon\tau,\varepsilon)\Pi z(\tau-\Delta)=0$$

так, як запропоновано в [1, 7], для невідомих функцій $y_k(t)$ та $\Pi_k z(\tau)$ дістанемо системи рівнянь. Для регулярної частини:

$$(a_0(t)+d_0(t))y_0(t)=f_0(t);$$
$$(a_0(t)+d_0(t))y_1(t)=-b_0(t)y_0'-a_1(t)y_0; \tag{13}$$
$$(a_0(t)+d_0(t))y_k(t)=-\sum_{s=0}^{k-1}b_{k-1-s}(t)y_s'-\sum_{s=0}^{k}a_{k-s}(t)y_s-\sum_{s=0}^{k}d_{k-s}(t)\sum_{p=0}^{s}\frac{y_p^{(s)}}{p!}-y_{k-2}'';\ k\ge 2,$$

та для примежових функцій для $k\ge 1$:

$$\frac{d^2\Pi_0 z(\tau)}{d\tau^2}+b_0(0)\frac{d\Pi_0 z(\tau)}{d\tau}+a_0(0)\Pi_0 z(\tau)+d_0(0)\Pi_0 z(\tau-\Delta)=0;$$
$$\frac{d^2\Pi_k z(\tau)}{d\tau^2}+b_0(0)\frac{d\Pi_k z(\tau)}{d\tau}+a_0\Pi_k z(\tau)+d_0(0)\Pi_k z(\tau-\Delta)=\Pi F_k(\tau); \tag{14}$$
$$\Pi F_k(\tau)=\sum_{s=0}^{k}\sum_{l=0}^{s}\left(\frac{b_l^{(s-l)}(0)d\Pi_{k-s}z(\tau)}{(s-l)!\cdot d\tau}+\frac{a_l^{(s-l)}(0)\Pi_{k-s}z(\tau)}{(s-l)!}+\frac{d_l^{(s-l)}(0)\Pi_{k-s}z(\tau-\Delta)}{(s-l)!}\right)\tau^{s-l},$$

Знайдемо із (13) $y_k(t)$ на проміжку $[0,L]$:

$$y_0(t)=\frac{f_0(t)}{a_0(t)+d_0(t)};\ y_1(t)=\frac{-b_0(t)y_0'-a_1(t)y_0}{a_0(t)+d_0(t)};\ \ldots;\ y_k(t)=\frac{F_k(t)}{a_0(t)+d_0(t)};$$
$$F_k(t)=-\sum_{s=0}^{k-1}b_{k-1-s}(t)y_s'-\sum_{s=0}^{k}a_{k-s}(t)y_s-\sum_{s=0}^{k}d_{k-s}(t)\sum_{p=0}^{s}\frac{y_p^{(s)}}{p!}-y_{k-2}'';\ k\ge 2,$$

для чого вимагатимемо виконання такої умови:

$$a_0(t)+d_0(t)\ne 0. \tag{15}$$

На $[-\varepsilon\Delta,0]$ покладемо

$$y_k(t)\equiv y_k(0);\ y_k'(t)\equiv y_k'(0), \tag{16}$$

знаходячи $y_k(0)$ із записаних вище рівнянь. Зокрема,

$$y_0(0) = \frac{f_0(0)}{a_0(0) + d_0(0)};\ y_0'(0) = \frac{f_0'(0)(a_0(0) + d_0(0)) - f_0(0)(a_0'(0) + d_0'(0))}{(a_0(0) + d_0(0))^2};$$

$$y_1(0) = \frac{-b_0(0)y_0'(0) - a_1(0)y_0(0)}{a_0(0) + d_0(0)};\ \dots.$$

Визначивши $\Pi_k z(\tau)$ із системи (14), отримуємо формальний розв'язок рівняння (10). Початкові умови $\Pi_k z(\tau)$ та $\Pi_k' z(\tau)$ на $[-\Delta, 0]$ задаємо так, щоб задовольнялись рівності, які отримуємо підстановкою (12) у початкову умову (11):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (y_k(t) + \Pi_k z(\tau)) = \varphi(\varepsilon\tau);\ \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Big(y_k'(t) + \frac{d\Pi_k z(\tau)}{\varepsilon \cdot d\tau} \Big) = \varphi'(\varepsilon t),$$

або

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (y_k(t) + \Pi_k z(\tau)) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \tau^k;\ \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Big(y_k'(t) + \frac{d\Pi_k z(\tau)}{\varepsilon \cdot d\tau} \Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!} \tau^k. \tag{17}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при степенях ε, дістанемо тотожності:

$$y_k(t) + \Pi_k z(\tau) = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \tau^k;\ y_k'(t) + \frac{d\Pi_k z(\tau)}{\varepsilon \cdot d\tau} = \frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!} \tau^k;\ k \geq 0.$$

З урахуванням (17) із останніх рівностей на $[-\Delta, 0]$ знаходимо:

$$\Pi_k z(\tau) = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \tau^k - y_k(0);\ \frac{d\Pi_k z(\tau)}{d\tau} = \varepsilon \Big(\frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!} \tau^k - y_k'(0) \Big);\ k \geq 0.$$

Описані міркування сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 4. *Якщо виконуються умови* $1°$, $2°$ *і (15), то рівняння (10) має формальний розв'язок (12).*

У припущенні, що корені рівняння $\lambda^2 + b_0(t)\lambda + a_0(t) + d_0(t)e^{-\lambda\Delta} = 0$ задовольняють умову

$$Re\lambda_k(t) \leq 2\mu < 0, \tag{18}$$

де $\mu > 0$ — стала, що не залежить від ε, згідно з [1, 7] для примежових функцій $\Pi_k z(\tau)$ та $\Pi_k' z(\tau)$ мають місце оцінки на $[-\Delta, 0]$:

$$|\Pi_k z(\tau)| \leq C_k e^{-\mu_k \tau};\ \left| \frac{d\Pi_k z(\tau)}{d\tau} \right| \leq C_k e^{-\mu_k \tau},\ \mu \geq \mu_0 > \mu_1 > \dots > \mu_k,\ k \geq 0.$$

З урахуванням записаних оцінок міркуваннями [1] доводиться наступна теорема.

Теорема 5. *Якщо виконуються умови* $1°$, $2°$ *і (18), то для точного розв'язку* $x(t, \varepsilon)$ *задачі (10), (11),* m *— наближення, отримане з (12) задовольняє нерівність*

$$|x^{(k)}(t, \varepsilon) - X_m^{(k)}(t, \varepsilon)| \leq C\varepsilon^m,$$

де C *— стала, що не залежить від* $\varepsilon, k = 0, 1$.

Умову 1° при цьому способі побудови можна послабити, вимагаючи диференційовності вказаних функцій до порядку m включно.

Отже, результатом сформульованих тверджень є побудова асимптотичного розв'язку лінійного диференціального рівняння зі сталим відхиленням аргументу при наявності точки повороту.

Література

[1] *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.,* Асимтотические разложения сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973. — 272 с.

[2] *Ключник І. Г., Завізіон Г. В.*, Про асимптотичне інтегрування сингулярно збуреної системи лінійних диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу // Нелінійні коливання. — 2010. — 13, № 2. — С. 161–176.

[3] *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981. — 400 с.

[4] *Норкин С. Б.* Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1965. — 356 с.

[5] *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1983. — 352 с.

[6] *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Пидченко Ю. П., Сотниченко Н. А.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — К.: Наук. думка, 1981. — 296 с.

[7] *Фодчук В.И., Якимов И. В.* Асимптотика решений сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием. // УМЖ. — 1989. — 41, № 5. — С. 652–658.

[8] *Шкіль М. І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. — К.: Вища школа, 1971. — 228 с.