Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2012, № 13 (2).— С. 160–167.

Рівняння Ейрі

Ю. П. Підченко

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

Ключові слова: Рівняння Ейрі, звичайні диференціальні рівняння, функції Ейрі.

Airy equation

Pidchenko Ju. P.

National Pedagogical Dragomanov University

Key words: Airy equation, ordinary differential equations, Airy functions.

AMS Subject Classifications (2010): 34A05

Розв'яжемо рівняння

$$x''(t) - tx(t) = 0, \tag{1}$$

де $x(t)$ — невідома функція від t, визначена на деякому проміжку, скінченному чи нескінченному ($[a;b] \subset (0;+\infty)$).

Для даного рівняння відомо два лінійно незалежних розв'язки у вигляді спеціальних функцій $A_i(x)$ і $B_i(x)$, які називають спеціальними функціями Ейрі, на честь британського математика і астронома Джорджа Бідделя Ейрі (1801 – 1892 рр.).

Дане рівняння розглядаємо як важливий приклад застосування розробленого нами методу розв'язання системи лінійних диференціальних рівнянь із змінною матрицею другого порядку [1].

Заміною

$$\begin{cases} x = y_1, \\ x' = y_2 \end{cases} \tag{2}$$

це рівняння зводиться до системи

$$y' = A(t)y, \tag{3}$$

де

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Вважатимемо, що $t > 0$. Тоді підстановкою [2]

$$y = V(t)z, \tag{5}$$

де

$$V(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{t} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

система (3) зведеться до вигляду

$$z'(t) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{t} \\ \sqrt{t} & -\frac{1}{2t} \end{pmatrix} z(t), \tag{7}$$

матриця якої є симетричною. Тому до системи (7) можна застосувати метод, запропонований в [1]. Для цього спочатку знайдемо власні значення матриці

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{t} \\ \sqrt{t} & -\frac{1}{2t} \end{pmatrix}.$$

$$\det(A_1(t) - \lambda E) = 0 \Longrightarrow \lambda^2 + \frac{1}{2t}\lambda - t = 0 \Longrightarrow$$

$$\lambda_1 = \frac{-1 - \sqrt{16t^3 + 1}}{4t}, \ \lambda_2 = \frac{-1 + \sqrt{16t^3 + 1}}{4t}. \tag{8}$$

Для матриці $A_1(t)$ побудуємо перетворювальну матрицю $T(t)$ у вигляді

$$T(t) = \begin{pmatrix} c_1(t)f_1(t) & c_2(t) \\ c_1(t) & c_2(t)f_2(t) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

де

$$f_1(t) = \frac{a_{12}(t)}{\lambda_1(t) - a_{11}(t)}, \ f_2(t) = \frac{\lambda_2(t) - a_{11}(t)}{a_{12}(t)},$$

$c_1(t), c_2(t)$ — довільні диференційовні функції.

Для нашого випадку маємо:

$$f_1(t) = -4\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{16t^3 + 1} + 1}, \ f_2(t) = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{16t^3 + 1} - 1}{t^{\frac{3}{2}}}. \tag{10}$$

Легко переконатися, що

$$f_1(t) + f_2(t) = 0, \tag{11}$$

а, отже,

$$\triangle = \det T = c_1(t)c_2(t)(f_1(t)f_2(t) - 1) = -c_1(t)c_2(t)(f_1^2(t) + 1) \neq 0. \tag{12}$$

Виконавши в системі (7) підстановку

$$x(t)=T(t)z(t), \tag{13}$$

приходимо до системи

$$z'(t)=T^{-1}(t)A_1(t)T(t)z(t)+T^{-1}(t)T'(t)z(t), \tag{14}$$

або

$$z'(t)=\Lambda(t)z(t)-\frac{1}{\triangle}B(t)z(t), \tag{15}$$

де $\Lambda(t)=\mathrm{diag}\{\lambda_1(\mathrm{t}),\lambda_2(\mathrm{t})\}$ — діагональна матриця,

$$B(t)=\begin{pmatrix}\frac{c_1'(t)}{c_1(t)}+q(t) & -u(t)\rho(t)\\ \frac{\rho(t)}{u(t)} & \frac{c_2'(t)}{c_2(t)}+q(t)\end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$q(t)=\frac{f_1(t)f_1'(t)}{f_1^2(t)+1},\ \rho(t)=\frac{f_1'(t)}{f_1^2(t)+1},\ u(t)=\frac{c_2(t)}{c_1(t)}. \tag{17}$$

Тоді рівняння (15) набуває вигляду

$$z'(t)=\widetilde{B}(t)z(t), \tag{18}$$

причому

$$\widetilde{b}_{11}(t)=\lambda_1(t)-\frac{c_1'(t)}{c_1(t)}-q(t),\ \widetilde{b}_{12}(t)=u(t)\rho(t),$$
$$\widetilde{b}_{21}(t)=-\frac{\rho(t)}{u(t)},\ \widetilde{b}_{22}(t)=\lambda_2(t)-\frac{c_2'(t)}{c_2(t)}-q(t). \tag{19}$$

Далі виконаємо в системі (18) заміну

$$z(t)=Q(t)v(t), \tag{20}$$

де

$$Q(t)=\mathrm{diag}\{1,\delta(\mathrm{t})\}, \tag{21}$$

$v(t)$ — новий невідомий двовимірний вектор, а функція $\delta(t)$ буде визначена пізніше.

Приходимо до системи

$$v'(t)=\widetilde{\widetilde{B}}(t)v(t), \tag{22}$$

де

$$\widetilde{\widetilde{b}}_{11}(t)=\widetilde{b}_{11}(t),\ \widetilde{\widetilde{b}}_{12}(t)=\delta(t)\widetilde{b}_{12}(t),$$

$$\widetilde{\widetilde{b}}_{21}(t) = \frac{1}{\delta(t)}\widetilde{b}_{21}(t),\ \widetilde{\widetilde{b}}_{22}(t) = \widetilde{b}_{22}(t) - \frac{\delta'(t)}{\delta(t)}. \tag{23}$$

Матриця $\widetilde{\widetilde{B}}(t)$ неособлива (це буде видно з подальших міркувань). Тому систему (22) запишемо у вигляді:

$$v(t) = \widetilde{\widetilde{B}}^{-1}(t)v'(t). \tag{24}$$

Виконавши в системі (24) заміну

$$v(t) = Q_1(t)w(t), \tag{25}$$

де

$$Q_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & c(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

зведемо її до системи

$$w(t) = Q_1^{-1}(t)\widetilde{\widetilde{B}}^{-1}(t)Q_1'(t)w(t) + Q_1^{-1}(t)\widetilde{\widetilde{B}}^{-1}(t)Q_1(t)w'(t). \tag{27}$$

Визначимо матриці коефіцієнти правої частини рівності (27):

$$\begin{gathered} Q_1^{-1}(t)\widetilde{\widetilde{B}}^{-1}(t)Q_1'(t) = \\ = \frac{1}{\triangle_1(t)}\begin{pmatrix} 1 & -c(t) \\ 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{\widetilde{b}}_{22}(t) & -\widetilde{\widetilde{b}}_{12}(t) \\ -\widetilde{\widetilde{b}}_{21}(t) & \widetilde{\widetilde{b}}_{11}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & c'(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{\triangle_1(t)}\begin{pmatrix} 0 & c'(t)\widetilde{\widetilde{b}}_{22}(t) + c'(t)c(t)\widetilde{\widetilde{b}}_{12}(t) \\ 0 & -c'(t)\widetilde{\widetilde{b}}_{21}(t) \end{pmatrix}; \end{gathered} \tag{28}$$

$$\begin{gathered} Q_1^{-1}(t)\widetilde{\widetilde{B}}^{-1}(t)Q_1(t) = \frac{1}{\triangle_1(t)}\times \\ \times\begin{pmatrix} \widetilde{\widetilde{b}}_{22}(t) + c(t)\widetilde{\widetilde{b}}_{21}(t) & c(t)\widetilde{\widetilde{b}}_{22}(t) + c^2(t)\widetilde{\widetilde{b}}_{12}(t) - \widetilde{\widetilde{b}}_{12}(t) - c(t)\widetilde{\widetilde{b}}_{11}(t) \\ -\widetilde{\widetilde{b}}_{21}(t) & -c(t)\widetilde{\widetilde{b}}_{21}(t) + \widetilde{\widetilde{b}}_{11}(t) \end{pmatrix}; \end{gathered} \tag{29}$$

де

$$\triangle_1(t) = \det\widetilde{\widetilde{B}}(t). \tag{30}$$

Далі виберемо функції $c(t), u(t)$ і $\delta(t)$ так, щоб виконувались рівності:

$$\begin{gathered} c'(t)\widetilde{\widetilde{b}}_{12}(t) + c'(t)c(t)\widetilde{\widetilde{b}}_{21}(t) = 0, \\ c(t)\widetilde{\widetilde{b}}_{22}(t) + c^2(t)\widetilde{\widetilde{b}}_{21}(t) - \widetilde{\widetilde{b}}_{12}(t) - c(t)\widetilde{\widetilde{b}}_{11}(t) = 0. \end{gathered} \tag{31}$$

Із першої з цих рівностей маємо:

$$\widetilde{\widetilde{b}}_{22}(t) + c(t)\widetilde{\widetilde{b}}_{21}(t) = 0. \tag{32}$$

Звідси, враховуючи (23), одержуємо:

$$\widetilde{b}_{22}(t) - \frac{\delta'(t)}{\delta(t)} + c(t)\frac{1}{\delta(t)}\widetilde{b}_{21}(t) = 0. \tag{33}$$

Врахувавши (19), приходимо до рівності

$$\widetilde{b}_{22}(t) - \frac{\delta'(t)}{\delta(t)} - c(t)\frac{1}{\delta(t)}\frac{\rho(t)}{u(t)} = 0. \tag{34}$$

Покладемо

$$\widetilde{b}_{22}(t) = 0, \tag{35}$$

тоді

$$\frac{\delta'(t)}{\delta(t)} + c(t)\frac{1}{\delta(t)}\frac{\rho(t)}{u(t)} = 0. \tag{36}$$

Взявши

$$c(t) = u(t), \tag{37}$$

$\delta'(t) = -\rho(t)$, знаходимо

$$\delta(t) = -\int \rho(t)dt. \tag{38}$$

Тоді

$$\triangle(t) = \rho^2(t) \neq 0. \tag{39}$$

Оскільки $\det \widetilde{\widetilde{B}}(t) = \det \widetilde{B}(t) \det Q(t) = \rho^2(t)\delta(t) \neq 0$, то матриця $\widetilde{\widetilde{B}}(t)$ неособлива. Із другої рівності (31) знайдемо $u(t)$. Дійсно, згідно з (29) запишемо її у вигляді

$$\widetilde{b}_{22}(t) - \frac{\delta'(t)}{\delta(t)} + c(t)\frac{1}{\delta(t)} - \frac{1}{c(t)}\delta(t)\widetilde{b}_{12}(t) - \widetilde{b}_{21}(t) = 0, \tag{40}$$

звідки

$$-(\widetilde{b}_{11}(t) - \widetilde{b}_{22}(t)) - \frac{1}{\delta(t)}c(t)\frac{\rho(t)}{u(t)} - \delta(t)\frac{1}{c(t)}u(t)\rho(t) - \frac{\delta'(t)}{\delta(t)} = 0. \tag{41}$$

Враховуючи (15), (18) і (37), дістанемо

$$-\frac{u'(t)}{u(t)} + \lambda_1(t) - \lambda_2(t) - \frac{1}{\delta(t)}\rho(t) - \delta(t)\rho(t) - \frac{\delta'(t)}{\delta(t)} = 0.$$

Звідси

$$\frac{u'(t)}{u(t)} = \Psi(t), \tag{42}$$

де

$$\Psi(t) = \lambda_1(t) - \lambda_2(t) - \frac{1}{\delta(t)}\rho(t) - \delta(t)\rho(t) - \frac{\delta'(t)}{\delta(t)}, \tag{43}$$

і

$$u(t) = e^{\int \Psi(t)dt}. \tag{44}$$

Зауважимо, що із рівностей (35) і (18) визначається функція $c_2(t)$:

$$\widetilde{b}_{22}(t) = 0 \Longrightarrow \lambda_2(t) - \frac{c_2'(t)}{c_2(t)} - q(t) = 0;$$

$$\frac{c_2'(t)}{c_2(t)} = \lambda_2(t) - q(t) \Longrightarrow c_2(t) = e^{\int(\lambda_2(t) - q(t))dt}. \tag{45}$$

Знаючи $u(t)$ і $c_2(t)$, на підставі (15) можна визначити і функцію $c_1(t)$:

$$c_1(t) = \frac{c_2(t)}{u(t)}.$$

Отже, у матриці $\widetilde{B}(t)$ всі елементи визначені. Повернемось тепер до системи (27). Із (18), (23), (31) і (39) дістанемо

$$w(t) = \frac{1}{\triangle_1(t)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{c'(t)\rho(t)}{\delta(t)u(t)} \end{pmatrix} w(t) +$$

$$+ \frac{1}{\triangle_1(t)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\rho(t)}{\delta(t)u(t)} & \widetilde{b}_{11}(t) + \frac{\rho(t)}{\delta(t)} \end{pmatrix} w'(t), \tag{46}$$

звідки

$$w_1(t) = 0,$$

$$\left(1 - \frac{c'(t)\rho(t)}{\triangle_1(t)\delta(t)u(t)}\right) w_2(t) = \frac{1}{\triangle_1(t)} \left(\widetilde{b}_{11}(t) + \frac{\rho(t)}{\delta(t)}\right) w_2'(t). \tag{47}$$

Із другого рівняння маємо

$$\frac{w_2'(t)}{w_2(t)} = \frac{1 - \frac{c'(t)\rho(t)}{\triangle_1(t)\delta(t)u(t)}}{\frac{1}{\triangle_1(t)}\left(\widetilde{b}_{11}(t) + \frac{\rho(t)}{\delta(t)}\right)} \Longrightarrow \frac{w_2'(t)}{w_2(t)} = \frac{\triangle_1(t) - \frac{c'(t)\rho(t)}{\delta(t)u(t)}}{\widetilde{b}_{11}(t) + \frac{\rho(t)}{\delta(t)}}.$$

Враховуючи, що $\triangle_1(t) = \rho^2(t)\delta(t)$, $c(t) = u(t)$, $\delta(t) = -\int \rho(t)dt$ і $\frac{u'(t)}{u(t)} = \Psi(t)$, одержимо

$$\frac{w_2'(t)}{w_2(t)} = \frac{\Psi(t)\rho(t) - \rho^2(t)\left(\int \rho(t)dt\right)^2}{\left(\lambda_1(t) - \frac{c'(t)}{c(t)} - q(t)\right)\int \rho(t)dt - \rho(t)}, \tag{48}$$

$$w_2(t) = e^{\int \varphi(t)dt}, \tag{49}$$

де

$$\varphi(t) = \frac{\Psi(t)\rho(t) - \rho^2(t)\left(\int \rho(t)dt\right)^2}{\left(\lambda_1(t) - \frac{c'(t)}{c(t)} - q(t)\right)\int \rho(t)dt - \rho(t)}. \tag{50}$$

Отже, вектор $w(t)$ визначений повністю. Тепер за формулами (25), (26), і (37) знайдемо вектор $v(t)$:

$$v(t) = \begin{pmatrix} 1 & u(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ w_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t)w_2(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix}. \tag{51}$$

Згідно з (5), (13) і (20)

$$y(t) = V(t)T(t)Q(t)v(t). \tag{52}$$

Отже, вектор $y(t)$ визначений повністю. Згідно з (2), знаходимо один розв'язок рівняння (1): $x = y_1$.

Аналогічно можна знайти й інший розв'язок рівняння (1), взявши, наприклад, при знаходженні $\delta(t)$ сталу інтегрування відмінну від нуля. Одержаний розв'язок (1), як це легко бачити, буде лінійно незалежним з першим. Тому лінійна комбінація цих розв'язків дасть загальний розв'язок рівняння Ейрі.

Зазначимо, що другий розв'язок, лінійно незалежний з першим, можна побудувати й не змінюючи $\delta(t)$, по-іншому вибравши функцію $u(t)$.

Література

[1] *Підченко Ю.П.* Знаходження точних розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь із симетрично змінною матрицею другого порядку./ Ю.П. Підченко // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. Випуск 9. – К., 2009. – С. 187 – 198.

[2] *Підченко Ю.П.* Диференціальні рівняння Ейрі. / Ю.П. Підченко //Тринадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. 13-15 травня. Київ. Матеріали конференції.– К., 2010. – С. 325.

References

[1] Pidchenko Ju. P. *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1: Fiz-mat. nauky (Transactions of Dragomanov National Pedagogical University. Series 1: Phys.- Math. Sciences)* - 2009, 9, pp. 187 - 198.

[2] Pidchenko Ju. P. *Trynadcjata mizhnarodna naukova konferencija imeni akademika M. Kravchuka. 13-15 travnja. Kyi'v. Materialy konferencii'. (Thirteenth International Conference Academician M. Kravchuk. 13-15 May. Kyiv. Proceedings.)* - 2010 - p. 325.