Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2012, № 13 (2).— С. 104–114.

УДК 517.5

Тополого-метричні та фрактальні властивості множини розв'язків одного класу рівнянь, які містять функцію частоти цифр

О. В. Котова,

Херсонський державний університет

Анотація. Вказано алгоритм побудови коренів рівняння $\nu_i^s(x) = x$, де $\nu_i^s(x)$ — частота цифри «i» в s-адичному розкладі числа x. Обчислено розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини коренів рівняння, які знаходяться за вказаним алгоритмом. Цим самим отримано нижню оцінку розмірності Хаусдорфа–Безиковича множини всіх розв'язків досліджуваного рівняння.

Ключові слова: асимптотична частота символів, розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини, s-адичне зображення дійсного числа.

Topological, metric and fractal properties of the set of solutions of one class of equations that contain the function of frequency of digits

O. Kotova,

Kherson State University

Abstract. The algorithm of construction of the roots of the equation $\nu_i^s(x) = x$ is given, here $\nu_i^s(x)$ is the frequency of the digit ¡¡i¿¿ in a s-adic expansion of x. The Hausdorff dimension of the set of the roots of this equation is obtained, the roots are calculated in accordance with this algorithm. This means that the lowest estimation of the Hausdorff dimension of the set of all solutions of the given equation is obtained.

AMS Subject Classifications (2010): 28A80, 60G30.

Key words: asymptotic frequency of digit, Hausdorff dimension of set, s-adic expansion of real number.

Подання числа x у вигляді ряду

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right],$$

де $\alpha_k \in N^0_{s-1} = A$, $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_{s-1}\}$ (s — фіксоване натуральне число, більше 1) — задана множина чисел, така, що має властивості:

$$\begin{cases} 1) \ \ q_i > 0, \\ 2) q_0 + q_1 + \ldots + q_{s-1} = 1, \end{cases}$$

$\beta_0 = 0$, $\beta_j = q_0+q_1+\ldots+q_{j-1}$, називається його *$s$-символьним Q-представленням*, яке символічно записується у вигляді $\triangle_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots}$ і називається *s-символьним Q-зображенням* числа x.

При $q_0 = q_1 = \ldots = q_{s-1} = s^{-1}$ s-символьне Q-зображення числа x

$$\Delta^s_{\gamma_1(x)\ldots\gamma_k(x)\ldots}$$

є *s-адичним зображенням* числа x, тобто

$$x \equiv \Delta^s_{\gamma_1(x)\ldots\gamma_k(x)\ldots} = \frac{\gamma_1}{s} + \ldots + \frac{\gamma_k}{s^k} + \ldots, \tag{1}$$
$$\gamma_k = \gamma_k(x) \in \{0, 1, \ldots, s-1\}.$$

Кожне ірраціональне x має єдиний розклад (1), а деякі раціональні числа мають їх два (такі називаються *раціональними* в s-адичній системі числення).

Частотою цифри «i» в s-символьному Q-зображенні числа x називається значення $\nu_i(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{N_i(x,n)}{n}$ (якщо існує границя відношення $\frac{N_i(x,n)}{n}$), де $i \in A$, $N_i(x,n) = \#\{k : \alpha_k(x) = i, k \le n\}$.

Поняття частоти цифр зображення дійсного числа в s-адичному розкладі є продуктивним у різних відношеннях. В термінах частоти формулюються нормальні властивості чисел, формально просто задаються фрактали тощо. Функція частоти цифри є всюди розривною і має непросту локальну поведінку. Ще більш складною є динаміка на числовій прямій породжена цією функцією.

Легко бачити, що існування і значення функції $\nu_i(x)$ не залежить від довільної скінченної кількості перших цифр x. Можна навести приклад числа, у якого існують частоти всіх цифр [**2**], не існує частоти принаймні однієї цифри [**5, 3**], жодна цифра не має частоти [**4**].

Лема 1. *Рівняння $\nu^s_i(x) = x$, $i \in A$, не має раціональних коренів в s-адичній системі числення, крім $x = 0$.*

Справді, для довільного ненульового раціонального числа в s-адичній системі числення $x = \Delta^s_{\gamma_1\ldots\gamma_k}$ отримуємо, що $\nu^s_i(x) = 0 \ne x$. Тому при $x \ne 0$ маємо $\nu^s_i(x) \ne x$.

Теорема 1. *Число* $x = \frac{\gamma_1}{s} + \sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{l=1}^{e_j} \frac{\beta_{lj}}{s^{s_j+l}}$, *де*

$$\gamma_1 \in A, x_1 = \frac{\gamma_1}{s},$$

$$\beta_{ln} = [(s_n + l)\, x_n] - [(s_n + l - 1)\, x_n]\,, \tag{2}$$

$$x_n = \frac{\gamma_1}{s} + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{e_j} \frac{\beta_{lj}}{s^{s_j + l}},$$

$$s_1 = 1, s_n = s^{s_{n-1}}, \tag{3}$$

$$e_n = s_{n+1} - s_n = s^{s_n} - s_n, \tag{4}$$

є розв'язком рівняння $\nu_1^s(x) = x$.

Доведення. Число x є границею послідовності раціональних в s-адичній системі числення точок x_k, яка будується наступним чином:

$$x_1 = \frac{\gamma_1}{s} \equiv \Delta^s_{\gamma_1};$$

$$x_2 = \Delta^s_{\gamma_1 \beta_{11} \beta_{21} \ldots \beta_{e_1 1}},$$

де

$s_2 = s_1 + e_1 = s^{s_1} = s, e_1 = s - 1,$

$\beta_{11} = [(s_1 + 1)\, x_1] - [s_1 x_1] = [2x_1] - [x_1]\,,$

$\beta_{21} = [(s_1 + 2)\, x_1] - [(s_1 + 1)\, x_1] = [3x_1] - [2x_1]\,,$

. . . .

$\beta_{e_1 1} = [(s_1 + e_1)\, x_1] - [(s_1 + e_1 - 1)\, x_1] = [s x_1] - [(s-1) x_1];$

Аналогічно визначаються числа x_3, x_4,...

Якщо число $x_k = \Delta^s_{\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_{s_k}}$ вже побудовано, то наступний член послідовності x_{k+1} знаходимо таким чином.

Будуємо число

$$x_{k+1} = \Delta^s_{\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_{s_k} \beta_{1k} \beta_{2k} \ldots \beta_{e_k k}},$$

де

$$s_{k+1} = s_k + e_k = s^{s_k}, e_k = s^{s_k} - s_k,$$

поклавши:

$\beta_{1k} = [(s_k + 1)\, x_k] - [s_k x_k]\,;$

$\beta_{2k} = [(s_k + 2)\, x_k] - [(s_k + 1)\, x_k]\,;$

. . . .

$\beta_{jk} = [(s_k + j)\, x_k] - [(s_k + j - 1)\, x_k]\,;$

. . . .

$\beta_{e_k k} = [(s_k + e_k)\, x_k] - [(s_k + e_k - 1)\, x_k] = [s^{s_k} x_k] - [(s^{s_k} - 1)\, x_k] = 1.$

Підрахуємо кількість одиниць в s-адичному розкладі числа x_{k+1}.

В роботі [**8**] доведено, що якщо $x \in [0; 1)$, $k \in Z$, то $r = [(k+1)\, x] - [kx] \in \{0; 1\}$.

Отже, $\beta_{lj} \in \{0, 1\}$ і кількість одиниць серед β_{lj} дорівнює їх сумі.

$$N_1\,(x_{k+1}) = N_1\,(x_k) + \sum_{j=1}^{e_k} \beta_{jk} = N_1\,(x_k) + s^{s_k} x_k - [s_k x_k]\,.$$

Тоді відносна частота одиниць в s-адичному розкладі числа x_{k+1} дорівнює

$$\frac{N_1(x_{k+1})}{s_{k+1}} = x_k + \frac{N_1(x_k)}{s^{s_k}} - \frac{[s_k x_k]}{s^{s_k}}$$

і т.д. Тоді $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ і $\gamma_n(x) = \gamma_n(x_k)$ при $n = \overline{1, s_k}$ для всіх k.

Виразимо функцію $\dfrac{N_1(x_{k+1})}{s_{k+1}} - x_k$ і оцінимо її:

$$\frac{N_1(x_{k+1})}{s_{k+1}} - x_k = \frac{N_1(x_k)}{s^{s_k}} - \frac{[s_k x_k]}{s^{s_k}}.$$

$$\frac{N_1(x_k)}{s^{s_k}} - \frac{[s_k x_k]}{s^{s_k}} \leq \frac{s_k}{s^{s_k}} - \frac{[s_k x_k]}{s^{s_k}} \leq \frac{s_k}{s^{s_k}}.$$

$$\frac{N_1(x_k)}{s^{s_k}} - \frac{[s_k x_k]}{s^{s_k}} > -\frac{[s_k x_k]}{s^{s_k}} \geq -\frac{s_k}{s^{s_k}}.$$

Таким чином

$$\left|\frac{N_1(x_{k+1})}{s_{k+1}} - x_k\right| \leq \frac{s_k}{s^{s_k}}.$$

Якщо $k \to \infty$, $\dfrac{s_k}{s^{s_k}} \to 0$. Якщо $x_k \to x$, то $\dfrac{N_1(x_{k+1})}{s_{k+1}} \to \nu_1^s(x)$.

Доведемо, що $\nu_1^s(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{N_1(x_{k+1})}{s_{k+1}} = x$.

Якщо s-адичним розкладом числа x є $\Delta^s_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots}$, то через u_n позначимо число, s-адичним розкладом якого є $\Delta^s_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n}$.

Тоді

$$x_1 = u_{s_1}, x_2 = u_{s_2}, \ldots, x_k = u_{s_k},$$

Покажемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N_1(u_n)}{n}$ існує.

Тоді для довільного n існує таке k, що

$$x_{k+1} < u_n \leq x_{k+2}, (s_{k+1} < n \leq s_{k+2}).$$

$$N_1(u_n) = [(s_{k+1} + j)\, x_{k+1}] - [s_{k+1}(x_{k+1} - x_k)] - [s_k x_k] + N_1(x_k),$$

де $1 \leq j \leq s^{s_{k+1}} - s_{k+1}$.

Виразимо функцію

$$\frac{N_1(u_n)}{s_{k+1} + j} - x_{k+1} = \frac{[(s_{k+1} + j)\, x_{k+1}] - (s_{k+1} + j)\, x_{k+1}}{s_{k+1} + j} -$$

$$-\frac{[s_{k+1}(x_{k+1} - x_k)]}{s_{k+1} + j} - \frac{[s_k x_k]}{s_{k+1} + j} + \frac{N_1(x_k)}{s_{k+1} + j}.$$

і оцінимо її:

$$\left|\frac{N_1(u_n)}{s_{k+1} + j} - x_{k+1}\right| \leq \left|\frac{[(s_{k+1} + j)\, x_{k+1}] - (s_{k+1} + j)\, x_{k+1}}{s_{k+1} + j}\right| + \left|\frac{[s_{k+1}(x_{k+1} - x_k)]}{s_{k+1} + j}\right| +$$

$$+\left|\frac{[s_k x_k]}{s_{k+1}+j}\right|+\left|\frac{N_1(x_k)}{s_{k+1}+j}\right| \le \frac{1}{s_{k+1}}+(x_{k+1}-x_k)+\frac{s_k}{s_{k+1}}+\frac{s_k}{s_{k+1}}<(x_{k+1}-x_k)+\frac{3s_k}{s_{k+1}}.$$

Нехай ε — довільне додатне число. Оскільки $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$, то існує таке натуральне число N_1, що при $n > N_1$ виконується нерівність: $|x_n - x| < \dfrac{\varepsilon}{10}$.

Тоді, якщо $n > N_1$ і $r > N_1$, то

$$|x_n - x_r| \le |x_n - x| + |x - x_r| < \frac{\varepsilon}{5};$$

Оскільки $s_{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$, то існує таке натуральне число N_2, що при $n > N_2$, $\dfrac{s_n}{s_{n+1}} < \dfrac{\varepsilon}{5}$. Візьмемо $N = max\,\{N_1, N_2\}$.

Припустимо, що n — конкретне натуральне число, яке задовольняє умові $n > s_{N+2}$.

Тоді для такого натурального числа існує число k таке, що $s_{k+1} < n \le s_{k+2}$.

Доведемо, що $k > N$.

Припустимо, що $k \le N$, тоді $k + 2 \le N + 2$.

Тому $n < s_{N+2}$, а це суперечить умові $n > s_{N+2}$.

Тоді

$$\left|\frac{N_1(u_n)}{s_{k+1}+j} - x_{k+1}\right| < (x_{k+1}-x_k) + \frac{3s_k}{s_{k+1}} < \frac{\varepsilon}{5} + \frac{3\varepsilon}{5} = \frac{4\varepsilon}{5}.$$

$$\left|\frac{N_1(u_n)}{s_{k+1}+j} - x\right| = \left|\frac{N_1(u_n)}{s_{k+1}+j} - x_{k+1} + x_{k+1} - x\right| \le$$

$$\le \left|\frac{N_1(u_n)}{s_{k+1}+j} - x_{k+1}\right| + |x_{k+1} - x| < \frac{4\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{10} < \varepsilon.$$

Отже, $\forall\varepsilon > 0\ \exists n \in N\ (n > s_{N+2}) : \left|\dfrac{N_1(u_n)}{s_{k+1}+j} - x\right| < \varepsilon$,

тобто існує $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N_1(u_n)}{s_{k+1}+j}$ і дорівнює x. □

Наслідок 1. *Число* $x = \dfrac{\gamma_1}{s} + \dfrac{\gamma_2}{s^2} + \ldots + \dfrac{\gamma_k}{s^k} + \sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{l=1}^{e_j} \dfrac{i\cdot\beta_{lj} + i_{lj}\cdot(1-\beta_{lj})}{s^{s_j+l}}$, *де*

$$\begin{aligned}
\gamma_1, i, i_{lj} &\in A, k \in N, i_{lj} \ne i, x_1 = \frac{\gamma_1}{s} + \ldots + \frac{\gamma_k}{s^k},\\
\beta_{ln} &= [(s_n + l)\,x_n] - [(s_n + l - 1)\,x_n]\,,\\
x_n &= \frac{\gamma_1}{s} + \frac{\gamma_2}{s^2} + \ldots + \frac{\gamma_k}{s^k} + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{e_j} \frac{i\cdot\beta_{lj} + i_{lj}\cdot(1-\beta_{lj})}{s^{s_j+l}},\\
s_1 &= k, s_n = s^{s_{n-1}},\\
e_n &= s_{n+1} - s_n = s^{s_n} - s_n,
\end{aligned}$$

є розв'язком рівняння $\nu_i^s(x) = x$.

Теорема 2. *Множина M чисел відрізка $[0;1]$, для яких виконується рівність $\nu_i^s(x) = x$, є:*

1. Скрізь щільною;

2. Скрізь розривною;

3. Нуль-множиною (в розумінні міри Лебега).

Доведення. Твердження 1 і 2 випливають безпосередньо з того факту, що належність числа x множині M не залежить від будь-якої скінченної кількості трійкових знаків.

Для доведення твердження 3, скористаємося тим, що міра Лебега множини нормальних чисел відрізка $[0;1]$ дорівнює 1.

Оскільки, для будь-якого x, що належить множині M, $\nu_1(x) \neq \frac{1}{s}$, то множина M не містить жодного нормального за основою s числа, тобто M є підмножиною множини W ненормальних чисел, а отже,
$\lambda(M) = \lambda(W) = 0$. □

Теорема 3. *Для довільної нескінченної послідовності нулів та одиниць $\{\varepsilon_n\}$ існують такі $\gamma_{(k-1)s+1}, \gamma_{(k-1)s+2}, \ldots, \gamma_{ks-1}, k = 1, 2, \ldots,$ $s > 2$, що число*

$$x = \Delta^s_{\gamma_1 \ldots \gamma_{s-1}\varepsilon_1\gamma_{s+1}\ldots\gamma_{2s-1}\varepsilon_2\ldots\gamma_{(k-1)s+1}\ldots\gamma_{ks-1}\varepsilon_k\ldots},$$

є розв'язком рівняння $\nu_1^s(x) = x$.

Доведення. Нехай $\{\varepsilon_n\}$ — довільна фіксована нескінченна послідовність нулів та одиниць;

$s_1 = 1$, $x_1 = \frac{\gamma_1}{s}$, $\gamma_1 = \left[\frac{s}{2}\right]$;

β_{ln}, s_{n+1}, e_n визначаються рівностями (2)–(4), де $n = 1, 2, \ldots$.

Покажемо, що в кожному рядку

$$\beta_{11}, \ldots, \beta_{e_1 1} = \beta_{(s-1)1};$$

$$\beta_{12}, \ldots, \beta_{s2};$$

$$\ldots\ldots\ldots;$$

$$\beta_{(s^s-2s+1)2}, \ldots, \beta_{(s^s-s)2} = \beta_{e_2 2};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$\beta_{1k}, \ldots, \beta_{sk};$$

$$\ldots\ldots\ldots;$$

$$\beta_{(s^{s_k}-s^{s_{k-1}}-s+1)k} = \beta_{e_k-s+1}, \ldots, \beta_{(s^{s_k}-s^{s_{k-1}})k} = \beta_{e_k k};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

є принаймні один нуль та одна одиниця.

$$\sum_{l=1}^{e_1} \beta_{l1} = s \cdot x_1 - [x_1] = s \cdot x_1 = \gamma_1.$$

Оскільки $s > 2$, то

$$0 < \sum_{l=1}^{e_1} \beta_{l1} < s - 1.$$

Отже, серед $\beta_{11}, \ldots, \beta_{e_1 1}$ є принаймні один нуль та одна одиниця.

Якщо $\varepsilon_1 = \beta_{e_1 1}$, то покладемо

$$x_2 = \Delta^s_{\gamma_1 \beta_{11} \beta_{21} \ldots \beta_{e_1 1}}.$$

Якщо $\varepsilon_1 \neq \beta_{e_1 1}$, то покладемо

$$x_2 = \Delta^s_{\gamma_1 \beta_{11} \beta_{21} \ldots (1-\beta_{\eta 1}) \ldots (1-\beta_{e_1 1})},$$

де $\beta_{\eta 1} \neq \beta_{e_1 1}$, $\beta_{(\eta+j)1} = \beta_{e_1 1}$, $j = \overline{1, e_1 - \eta - 1}$.

Таким чином, знайдено $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ і $x_2 = \Delta^s_{\gamma_1, \ldots, \gamma_s}$.

$$N_1(x_2) = N_1(x_1) + \sum_{l=1}^{e_1} \beta_{l1}.$$

$$\sum_{l=1}^{s} \beta_{l2} = [(s_2 + s)x_2] - [s_2 x_2].$$

Оскільки

$$\sum_{l=1}^{s} \beta_{l2} \leq (s_2 + s)x_2 - [s_2 x_2] \leq 1 + s_2 x_2 < 2 + \gamma_1 \leq s,$$

$$\sum_{l=1}^{s} \beta_{l2} \geq [s_2 x_2] + [s x_2] - [s_2 x_2] \geq s x_2 - 1 > \gamma_1 - 1 \geq 0,$$

то

$$0 < \sum_{l=1}^{s} \beta_{l2} < s.$$

Отже, серед $\beta_{12}, \ldots, \beta_{s2}$ є принаймні один нуль та одна одиниця.

Якщо $\varepsilon_2 = \beta_{s2}$, то покладемо $\gamma_{s+1} = \beta_{12}, \ldots, \gamma_{2s-1} = \beta_{(s-1)2}$.

Якщо $\varepsilon_2 \neq \beta_{s2}$, то покладемо $\gamma_{s+1} = \beta_{12}, \ldots, \gamma_{s+\eta} = (1 - \beta_{\eta 2}), \ldots, \gamma_{2s-1} = \beta_{(s-1)2}$, де $\beta_{\eta 2} \neq \beta_{s2}$, $\beta_{(\eta+j)2} = \beta_{s2}$, $j = \overline{1, s - \eta - 1}$. І т. д.

$\beta_{(s^s - 2s+1)2}, \ldots, \beta_{(s^s - s)2} = \beta_{e_2 2}$;

$$\sum_{l=s^s-2s+1}^{e_2} \beta_{l2} = [s^s x_2] - [(s^s - s)x_2],$$

$$0 < \sum_{l=s^s-2s+1}^{e_2} \beta_{l2} < s.$$

Отже, серед $\beta_{(s^s-2s+1)2}, \ldots, \beta_{e_2 2}$ є принаймні один нуль та одна одиниця.

Якщо $\varepsilon_{s^{s-1}} = \beta_{e_2 2}$, то покладемо $\gamma_{s^s-s+1} = \beta_{(s^s-2s+1)2}, \ldots, \gamma_{s^s-1} = \beta_{(e_2-1)2}$.

Якщо $\varepsilon_{s^{s-1}} \neq \beta_{e_2 2}$, то покладемо

$\gamma_{s^s-s+1} = \beta_{(s^s-2s+1)2}, \ldots, \gamma_{s^s-s+\eta} = (1-\beta_{(s^s-2s+\eta)2}), \ldots, \gamma_{s^s-1} = \beta_{(e_2-1)2}$, де $\beta_{(s^s-2s+\eta)2} \neq \beta_{e_2 2}$, $\beta_{(s^s-2s+\eta+j)2} = \beta_{e_2 2}$, $j = \overline{1, e_2 2 - (s^s - 2s + \eta) - 1}$.

Таким чином, знайдено $\gamma_1, \ldots, \gamma_{s^s}$ і $x_3 = \Delta^s_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{s_3}}$.

$$N_1(x_3) = N_1(x_2) + \sum_{l=1}^{e_2} \beta_{l2}.$$

І т. д.

$$\sum_{l=1}^{s} \beta_{lk} = [(s_k + s)x_k] - [s_k x_k].$$

$$0 < \sum_{l=1}^{s} \beta_{lk} < s.$$

Отже, серед $\beta_{1k}, \ldots, \beta_{sk}$ є принаймні один нуль та одна одиниця.

$$\sum_{l=e_k-s+1}^{e_k} \beta_{lk} = [s^{s_k} x_k] - [(s^{s_k} - s)x_k],$$

$$0 < \sum_{l=e_k-s+1}^{e_k} \beta_{lk} < s.$$

Отже, серед $\beta_{(e_k-s+1)k}, \ldots, \beta_{e_k 2}$ є принаймні один нуль та одна одиниця.

Аналогічно знаходимо $\gamma_{s_k+1}, \ldots, \gamma_{s_{k+1}}$ і $x_{k+1} = \Delta^s_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{s_{k+1}}}$.

$$N_1(x_{k+1}) = N_1(x_k) + \sum_{l=1}^{e_k} \beta_{lk}.$$

І т.д. $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ і $\gamma_n(x) = \gamma_n(x_k)$ при $n = \overline{1, s_k}$ для всіх k.

Доведення того, що границя $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{N_1(x_{k+1})}{s_{k+1}}$ існує і $\nu_1^s(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{N_1(x_{k+1})}{s_{k+1}} = x$ проводиться аналогічно до доведення теореми 1. □

Теорема 4. *Для довільної нескінченної послідовності нулів та одиниць* $\{\varepsilon_n\}$ *існують такі* $\gamma_{4(k-1)+1}, \gamma_{4(k-1)+2}, \gamma_{4(k-1)+3}, k = 1, 2, \ldots,$ *що число*

$$x = \Delta^s_{\gamma_1\gamma_2\gamma_3\varepsilon_1\gamma_5\gamma_6\gamma_7\varepsilon_2\ldots\gamma_{4(k-1)+1}\gamma_{4(k-1)+2}\gamma_{4(k-1)+3}\varepsilon_k\ldots},$$

є розв'язком рівняння $\nu_1^2(x) = x$.

Доведення. Нехай $\{\varepsilon_n\}$ — довільна фіксована нескінченна послідовність нулів та одиниць, $s_1 = 4$, $x_1 = \Delta^2_{0101}$, β_{ln}, s_{n+1}, e_n визначаються рівностями (2)–(4), де $n = 1, 2, \ldots$.

Для доведення твердження достатньо показати, що в серіях

$$\gamma_{4(k-1)+1}, \gamma_{4(k-1)+2}, \gamma_{4(k-1)+3}, \gamma_{4(k-1)+4},$$

де $k = 1, 2, \ldots$, є принаймні один нуль та одна одиниця. Дійсно, для $k = 1$ є принаймні один нуль та одна одиниця.

для $k > 1$ існують такі n та j, $j = \overline{0, s_{n+1} - s_n - 4}$, що

$$\sum_{l=1}^{4} \gamma_{4(k-1)+l} = [(s_k + j + 4)x_k] - [(s_k + j)x_k].$$

Оскільки

$$0 < \sum_{l=1}^{4} \gamma_{4(k-1)+l} < 4,$$

то для $k > 1$ є принаймні один нуль та одна одиниця. □

Наслідок 2. *Рівняння $\nu_i^s(x) = x$ має континуальну множину розв'язків.*

Теорема 5. *Розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини K_s розв'язків рівняння $\nu_i^s(x) = x$ ($s > 2$), отриманих за алгоритмом, наведеним при доведенні теореми* 3, *дорівнює* $\frac{1}{s}\log_s 2$.

Доведення. Добре відомо [**1**], що при визначенні розмірності Хаусдорфа–Безиковича можна обходитись циліндрами рангу s. Розглянемо покриття множини K_s циліндрами однакового рангу m. α-об'єм такого покриття

$$L_m^\alpha = \begin{cases} 2^{k-1}\left(s^{-(sk-j)}\right)^\alpha & \text{при} \quad m = sk - j, j \in \{s-1, \ldots, 1\}, \\ 2^k\left(s^{-(sk)}\right)^\alpha & \text{при} \quad m = sk, k \in N. \end{cases}$$

Очевидно, що $L_{sk-1} < L_{sk-j}$, при $j \in \{2, \ldots, s\}$. Тому будемо розглядати α-покриття множини K_s циліндрами рангу $n = sk - 1$. Тоді ентропійна α-міра Хаусдорфа [**2**, с.54] множини K_s виражається

$$\widehat{H}_\alpha(K) = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{k-1}}{s^{(sk-1)\alpha}} = \frac{s^\alpha}{2} \lim_{k\to\infty} \frac{2^k}{s^{sk\alpha}} = \frac{s^\alpha}{2} \lim_{k\to\infty} \left(\frac{2}{s^{s\alpha}}\right)^k.$$

З останнього виразу видно, що

$$\widehat{H}_\alpha(K_s) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \alpha > \frac{1}{s}\log_s 2, \\ \infty & \text{при} \quad \alpha < \frac{1}{s}\log_s 2; \end{cases}$$

тобто ентропійна розмірність множини K_s дорівнює $\alpha = \frac{1}{s}\log_s 2$.

Покажемо, що розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини K_s дорівнює $\frac{1}{s}\log_s 2$.

Розглянемо довільне скінченне покриття множини K_s циліндрами рангу s

$$\{u_j\}, (j=\overline{1,l})$$

і покажемо, що при $\alpha = \frac{1}{s}\log_s 2$ попереднє рангове покриття є „непокращуваним“.

Нехай u_j — один з циліндрів покриття. Тоді $|u_j| = s^{-n}$ для деякого $n \in N$.

Покладемо $n = sp - r$, $r \in \{0, \dots, s-1\}$. Тоді α-об'єм покриття тієї частини множини K_s, що належить Δ_j, тобто множини $K_s \bigcap \Delta_j$, циліндрами рангу $sp-r+m$ обчислюється за формулою:

$$L^{\alpha}_{sp-r+m}(K_s \bigcap \Delta_j) = \begin{cases} 2^{k-1}\left(s^{-(sp-r+sk-j)}\right)^{\alpha} & \text{при} \quad m = sk+r-j, j \in \{s-1, \dots, 1\}, \\ 2^{k}\left(s^{-(sp-r+sk)}\right)^{\alpha} & \text{при} \quad m = sk+r, k \in N. \end{cases}$$

Покажемо, що $L^{\alpha}_{sp-r+m}(K_s \bigcap u_j) \le V_n = \left(s^{-(sp-r)}\right)^{\alpha}$.

Очевидно, що $L_{s(p+k)-1} < L_{s(p+k)-j}$, при $j \in \{2, \dots, s\}$. Тому будемо розглядати α-покриття множини $K_s \bigcap \Delta_j$ циліндрами рангу $s(p+k)-1$. Його α-об'єм дорівнює

$$2^{k-1}\left(s^{-(sp+sk-1)}\right)^{\alpha}.$$

Оскільки $\left(\frac{2}{s^{s\alpha}}\right)^k = 1$ і $\frac{s^{(1-r)\alpha}}{2} < 1$, то при $\alpha = \frac{1}{s}\log_s 2$

$$2^{k-1}\left(s^{-(sp+sk-1)}\right)^{\alpha} = \left(s^{-(sp-r)}\right)^{\alpha}\frac{s^{(1-r)\alpha}}{2}\left(\frac{2}{s^{s\alpha}}\right)^k \le \left(s^{-(sp-r)}\right)^{\alpha}.$$

Отже, при $\alpha = \frac{1}{s}\log_s 2$ $\quad \widehat{H}^{\alpha}(K_s) = H^{\alpha}(K)$. Таким чином, розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини K_s співпадає з ентропійною розмірністю.

$\square$

Теорема 6. *Розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини K_2 розв'язків рівняння $\nu_i^2(x) = x$, отриманих за алгоритмом, наведеним при доведені теореми 4, дорівнює $\frac{1}{4}$.*

Теорема 7. *Розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини E_s всіх розв'язків рівняння $\nu_i^s(x) = x$ є не меншою, ніж $\frac{1}{s}$ при $s > 2$ і є не меншою, ніж $\frac{1}{4}$ при $s = 2$.*

Твердження безпосередньо випливає з теорем 3, 4 та наслідку 1.

Література

[1] *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наукова думка, 1992. — 208 с.

[2] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[3] *Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Суперфрактальність множини чисел, які не мають частоти n-адичних знаків, та фрактальні розподіли ймовірностей // Укр. мат. журн. — 1995. — 47, № 7. — С. 971–975.

[4] *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Topological and fractal properties of real numbers which are not normal // Bull. Sci. Math. — 2005. — 129, no. 8. — P. 615–630.

[5] *Постников А.Г.* Арифметическое моделирование случайних процессов // Тр. Мат. ин-та В.А. Стеклова АН СССР. — 1960. — Т. 57. — 83 с.

[6] *Постников А.Г.* Вероятностная теория чисел. — Москва: Знание, 1974. — 62 с.

[7] *Olsen L.* Applications of multifractal divergence points to sets of numbers defined by their N-adic expansion // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 2004. — 136, no. 1. — P. 139–165.

[8] *Котова О.В.* Континуальність множини розв'язків одного класу рівнянь, які містять функцію частоти трійкових цифр числа // Укр. мат. журн. — 2008. — 60, № 10. — С. 971–975.

References

[1] Turbin A. F., Pratsiovytyi M. V., *Fraktalnye mnozhestva, funkcii, rasspredeleniya (Fractal sets, functions, and distributions)*, Naukova Dumka, Kiev, 1992, 208 p.

[2] Pratsiovytyi M. V. *Fraktalnyi pidhid u doslidzhennjah synguljarnyh rozpodiliv (Fractal approach to investigations of singular distributions)*, Kyiv, 1998, 296 p.

[3] Pratsiovytyi M. V., Torbin, G., *Ukrainian Mathematical Journal*, 1995, **47**, №7, pp. 971–975.

[4] Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G., *Bull. Sci. Math.*, 2005, **129**, №8, pp. 615–630.

[5] Postnikov A., *Trudy Mat. Inst. Steklov*, 1960, **57**, pp. 83.

[6] Postnikov A., *Verojatnostnaja teorija chisel (Probabilistic number theory)*, 1974, 62 p.

[7] Olsen L. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 2004, **136**, №1, pp. 139–165.

[8] Kotova O. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2008, **60**, №10, pp. 971–975.