Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2009, № 10.— С. 121–131.

УДК 517.51+ 511.72

Функція Серпінського. Самоафінні властивості

Н. А. Василенко
(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова)

Анотація. В роботі досліджуються диференціальні, самоафінні та фрактальні властивості однієї неперервної функції, аргумент якої подається п'ятірковим дробом, а значення функції — трійковим. Доведено, що вона еквівалентна функції Серпінського, означеної в інший спосіб.

Abstract. In this paper we study differential, self-affine and fractal properties of a continuous function such that its argument is represented by the quinary fraction and its value is represented by the ternary fraction. We prove that it is equivalent to the Sierpiński function defined in a different way.

ВСТУП

Перші приклади неперервних недиференційовних функцій були побудовані ще у 19 ст. (Больцано, Веєрштрас та ін.). Аналітичні конструкції таких функцій використовували метод згущення особливостей за допомогою рядів [**9**]. На початку 20 ст. були успішні спроби знайти відносно прості приклади таких функцій. Одним з таких є приклад функції Серпінського, задання якої використовує трійкове і пятіркове зображення дійсних чисел. Після публікації теореми Банаха-Мазуркевича (в 1931 р.), яка стверджує, що множина недиференційовних функцій в просторі C[0,1] є множиною другої категорії Бера, інтерес до таких функцій дещо зріс і пошуки нових сімей таких функцій продовжувався.

В останнє дисятиріччя, на хвилі особливої популярності теорії фракталів, значно зросла увага до фрактальних властивостей недиференційовних функцій (графіків [**8**] та множин рівнів), причому не лише в самій математиці, а і в інших науках. Вони все частіше з'являються в результаті моделювання реальних процесів і явищ. Наприклад, в радіоелектроніці — вони використовуються при конструюванні фрактальних антен [**11**], в інформатиці - при обробці цифрових зображень та сигналів, в економічних теоріях - при аналізі коливань цін на фондовому ринку та інших науках.

Сьогодні неперервні, ніде не монотонні та недиференційовні функції є ще маловивченними. Однією з причин цього є труднощі їх аналітичного задання та дослідження. Класичні прийоми моделювання таких функцій були пов'язані з геометричними конструкціями, рекурентними формулами та функціональними рядами. В останній час для їх побудов застосовують різні системи зображення дійсних чисел[**2**], автомати [**12**] та перетворювачі символів одного зображення в інше [**5**]. Саме останній підхід і буде використаний для побудови однієї неперервної, ніде не диференційовної функції, яка, як виявилося, еквівалентна функції Серпінського, означеної в іншій спосіб.

1. Означення функції

Нехай $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ — алфавіт п'ятіркової системи числення. Визначимо на A дискретну функцію

$$\gamma(\alpha) = \begin{cases} \alpha, \text{ якщо } \alpha \in \{0, 1\}, \\ \left[\dfrac{\alpha}{2}\right], \text{ якщо } \alpha \in \{2, 3, 4\}. \end{cases} \tag{1}$$

Для кожної послідовності $(\alpha_n) \in A \equiv A^\infty = A \times A \times \ldots$ визначимо послідовність (c_n) наступним чином

$$c_1 = 0, \quad c_n = \begin{cases} c_{n-1}, \text{ якщо } \alpha_{n-1} \neq 2, \\ 1 - c_{n-1}. \text{ якщо } \alpha_{n-1} = 2; \end{cases} \tag{2}$$

Розглянемо на $[0, 1]$ функцію, аргумент якої подається п'ятірковим дробом:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{5^k} \equiv \Delta^5_{\alpha_1\,\alpha_2\,\cdots\alpha_k\cdots}, \;\; \alpha_k \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \equiv A, \tag{3}$$

а значення функції — у формі трійкового дробу:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{3^k} \equiv \Delta^3_{\beta_1\,\beta_2\,\cdots\beta_k\cdots}, \;\beta_k \in \{0, 1, 2\} \equiv B, \quad \text{де} \quad \beta_n = \begin{cases} \gamma(\alpha_n), \text{ якщо } c_n = 0, \\ 2 - \gamma(\alpha_n), \text{ якщо } c_n \neq 0. \end{cases} \tag{4}$$

Для доведення деяких тверджень ми будемо користуватися іншим, еквівалентним до умов (1)-(5), означенням функції:

$$\beta_n = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \left[\begin{array}{l} \alpha_n = 0 \text{ і } N_2(x, n-1) = 2m, \\ \alpha_n = 4 \text{ і } N_2(x, n-1) = 2m-1, \end{array}\right. \\ 1, \text{ якщо } \;\alpha_n \in \{1, 2, 3\}, \\ 2, \text{ якщо } \left[\begin{array}{l} \alpha_n = 0 \text{ і } N_2(x, n-1) = 2m-1, \\ \alpha_n = 4 \text{ і } N_2(x, n-1) = 2m, \end{array}\right. \end{cases} \tag{5}$$

де $N_2(x, n-1)$ — кількість значень $\alpha_n = 2$, в представленні x, до $(n-1)$-го місця включно.

Зауважимо, що β_n, взагалі кажучи, залежить від $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, але може і незалежити, якщо всі $\alpha_i \in \{1, 2, 3\}$ $(i = \overline{1, n-1})$.

2. Коректність означення функції та її неперервність

Покажемо, що функція визначена умовами (1)-(5), означена коректно.
Тобто, що для різних п'ятіркових зображень одного і того ж п'ятірково-раціонального значення аргумента вирази (1)-(5) дають однакове значення. Розглянемо два різних представлення п'ятірково-раціонального значення аргументу x:

$$x \equiv \Delta^5_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}\,\alpha_k\,(0)} = \Delta^5_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}\,\alpha_k-1\,(4)} \equiv x^*.$$

Тоді

$$f(x) - f(x^*) = \frac{\beta_k - \beta_k^*}{3^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\beta_n - \beta_n^*}{3^n},$$

де

$$\beta_k = \beta_k\left(f(x)\right), \beta_k^* = \beta_k\left(f(x^*)\right), \beta_n = \beta_n\left(f(x)\right), \beta_n^* = \beta_n\left(f(x^*)\right).$$

Очевидно, що $c_i(x) \equiv c_i(x^*)$ для $i < k$. А для $i \geq k$ розглянемо випадки:
1) якщо $c_{k+1}(x) = c_k = c_{k+1}(x^*)$, тоді $\alpha_k(x) \in A \setminus \{2\}$ і $\alpha_k(x^*) \in A \setminus \{2\}$. Таким чином,

$$f(x) - f(x^*) = (-1)^{c_k}\frac{1}{3^k} + (-1)^{c_k}\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{-2}{3^n} = 0.$$

2) якщо $c_{k+1}(x) \neq c_k = c_{k+1}(x^*)$ (або $c_{k+1}(x) = c_k \neq c_{k+1}(x^*)$), тоді $\alpha_k(x) = 2$ або $\alpha_k^*(x) = 2$. Звідки $\beta_k = \beta_k^*$ і $\beta_n = \beta_n^*$ $(n = k+1, k+2\ldots)$. А отже $f(x) - f(x^*) = 0$.

Отже, коректність означення функції, визначену умовами (1)-(5) обгрунтовано.

Теорема 1. *Функція $y = f(x)$ є неперервною в кожній точці відрізка [0,1].*

Доведення. Нехай x_0 - довільна точка відрізка $[0, 1]$. Для доведення неперервності $f(x)$ в точці x_0 досить показати, що $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$.

Спочатку розглянемо випадок, коли x_0 - п'ятірково-ірраціональна точка. Для довільного $x \in [0, 1]$ існує $m = m(x)$ таке, що

$$\begin{cases} \alpha_i(x) = \alpha_i(x_0), \;\; i = \overline{1, m-1}, \\ \alpha_m(x) \neq \alpha_m(x_0); \end{cases}$$

причому умова $x \to x_0$ рівносильна умові $m \to \infty$. Тоді

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\sum_{i=m}^{\infty}\frac{\beta_i(y) - \beta_i(y_0)}{3^i}\right| \leq \sum_{i=m}^{\infty}\frac{2}{3^i} = \frac{1}{3^{m-1}} \to 0 \;\; (m \to \infty),$$

де $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$. Отже $f(x)$- неперервна в точці x_0.

Нехай тепер x_0- п'ятірково-раціональне число, тобто $x_0 = \Delta^5_{\alpha_1\,\alpha_2\,\cdots\alpha_k\,(0)}$, $\alpha_k \neq 0$. Для доведення неперервності зліва треба використати п'ятіркове представлення x_0, що містить період (4), а справа– п'ятіркове представлення, що містить період (0) і повторити такі самі міркування як і для п'ятірково-ірраціональної точки. $\square$

3. Ніде не монотонність функції та властивості її рівнів

Означення 1. Відрізок $\left[\Delta^5_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m(0)}, \Delta^5_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m(4)}\right]$ називається циліндричним відрізком рангу m з основою $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m$, який будемо позначати $\Delta^5_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$, а відповідний приріст функції на цьому відрізку $-\ \mu_f(\Delta^5_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}) = f(\Delta^5_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m(4)}) - f(\Delta^5_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m(0)})$.

Означення 2. Функція $f(x)$ називається звивистою на відрізку $[0,1]$, якщо вона неперервна на цьому відрізку і не має жодного проміжку монотонності.

Лема 1. *Нехай* $\mu_f(\Delta^5_{\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_m})$ *- приріст функції на циліндричному відрізку* $\Delta^5_{\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_m}$. *Тоді*

$$\mu_f(\Delta^5_{\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_m}) = (-1)^{c_m}\frac{1}{3}.$$

Доведення. Дійсно, з умов (1)-(5), маємо:
1) для $c_m = 0$, $\mu_f(\Delta^5_{\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_m}) = \Delta^3_{(2)} = \frac{1}{3}$;
2) для $c_m = 1$, $\mu_f(\Delta^5_{\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_m}) = \Delta^3_{(0)} - \Delta^3_{(2)} = -\frac{1}{3}$. $\square$

Наслідок 1. *Функція* $f(x)$ *є звивистою на* $[0,1]$.

Для дослідження властивостей рівнів, будемо користуватися формулою (5).

Означення 3. Множиною рівня y_0 функції $f(x)$ називається множина

$$f^{-1}(y_0) = \{x : f(x) = y_0\}.$$

Лема 2. *Якщо* $y_0 = \Delta^3_{d_1d_2\ldots d_m(1)}$ *(*$m \in \mathbb{N}_0$*), то*
$f^{-1}(y_0) = C[5,V] \equiv \{x : \alpha_i(x) \in V = \{1,2,3\},\ \ i \in \mathbb{N}\}$, *тобто множина рівня* y_0 *має властивості: 1) є континуальною;*
2) ніде не щільною множиною;
3) нульової міри Лебега;
4) розмірність Хаусдорфа-Безиковича якої дорівнює $\log_5 3$.

Доведення. Спочатку доведемо твердження для $m = 0$, тобто для $y_0 = \Delta^5_{(1)}$.

Очевидно, що для довільної точки $x \in C[5,V]$ $f(x) = y_0$, тобто $f^{-1}(y_0) \supset C[5,V]$. Більше того, $\beta_n(y_0) = 1$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_n\left(f^{-1}(y_0)\right) \in \{1,2,3\}$, незалежно від n. Отже, $f^{-1}(y_0) = C[5,V]$. А, як відомо **[6]**, $C[5,V]$ має зазначені в лемі властивості.

Нехай тепер $m \neq 0$, тобто $y_0 = \Delta^3_{d_1d_2\ldots d_m(1)}$. Тоді

$$H = \cup^4_{i_1=0}\cup^4_{i_2=0}\ldots\cup^4_{i_m=0}\left[\Delta^5_{i_1i_2\ldots i_m} \cap f^{-1}(y_0)\right]. \qquad (6)$$

Довільне x, яке належить множині $\Delta^5_{i_1 i_2 \ldots i_m} \cap f^{-1}(y_0)$, у випадку, коли вона непорожня, має вигляд $x = \Delta^5_{i_1 i_2 \ldots i_m \alpha_{m+1} \alpha_{m+2} \ldots}$, $\alpha_{m+j} \in V$ $(j \in \mathbb{N})$.

Множина

$$\Delta^5_{i_1 i_2 \ldots i_m} \cap f^{-1}(y_0)$$

може бути порожньою або непорожньою, причому непорожньою, якщо існує впорядкований набір $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ такий, що

$$\beta_1 = \beta_1(i_1) = d_1,\ \ \beta_2 = \beta_2(i_1, i_2) = d_2, \ldots, \beta_m = \beta_m(i_1, i_2, \ldots, i_m) = d_m.$$

В цьому випадку множина $\Delta^5_{d_1 d_2 \ldots d_m} \bigcap f^{-1}(y_0)$ є в 5^m разів зменшеною "копією"множини $f^{-1}\left(\Delta^5_{(1)}\right)$, оскільки має місце

$$f^{-1}\left(\Delta^5_{(1)}\right) \overset{5^{-m}}{\sim} \Delta^5_{i_1 i_2 \ldots i_m} \cap f^{-1}(y_0).$$

Тоді $f^{-1}(y_0) = C[5, (V_k)]$, де $V_k = i_k$ $(k = \overline{1, m})$, $V_{m+j} = V$.

Оскільки мінімальні відрізки, які містять множини, що входять до об'єднання (7), попарно не перекриваються, то $f^{-1}(y_0)$ має вказані в лемі властивості. □

Лема 3. *Якщо в зображенні точки $y_0 = \Delta^3_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots}$ цифри $i_k \in B \setminus \{1\}$ $(k = \overline{1, \infty})$, то множина $f^{-1}(y_0)$ містить єдину точку.*

Доведення. Скористаємось методом від супротивного. Припустимо, що множина $f^{-1}(y_0)$ містить принаймні дві різні точки $x = \Delta^5_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}$ і $x' = \Delta^5_{\alpha'_1 \alpha'_2 \ldots \alpha'_k \ldots}$. Тоді, існує таке m, що $\alpha_m(x) \neq \alpha'_m(x')$, але $\alpha_i(x) = \alpha'_i(x')$ $(i < m)$.

З того, що $\alpha_i(x) = \alpha'_i(x')$ (для $i < m$) випливає, що $\beta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}) = \beta(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{m-1})$. Оскільки $\beta_m(x) = i_m(y_0) = \beta_m(x')$ і при цьому $\alpha_m(x) \neq \alpha'_m(x')$, то з (6) випливає

$$\left[\begin{array}{l} N_2(x, m-1) \neq N_2(x', m-1), \\ i_m(y_0) = 1. \end{array}\right.$$

З умови $N_2(x, m-1) \neq N_2(x', m-1)$ слідує, що $\exists \alpha_j$ $(j < m)$: $\alpha_j(x) \neq \alpha_j(x')$, а це суперечить припущенню. А умова $i_m(y_0) = 1$ суперечить умові леми. Отримали протиріччя, що і доводить лему. □

Лема 4. *Якщо $y_0 = \Delta^3_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_k \ldots}$, де*

$$\begin{cases} \beta_{k_n}(y_0) = 1,\ \ n \in \mathbb{N}, \\ \beta_j(y_0) \neq 1,\ \ \textit{при}\, j \notin \{k_n\}, \end{cases} \tag{7}$$

то множина $f^{-1}(y_0)$ є континуальною, причому в ній не існує пари точок x_1 і x_2 таких, що

$$\begin{cases} \alpha_{k_n}(x_1) = \alpha'_{k_n}(x_2), \\ \alpha_j(x_1) \neq \alpha'_j(x_2),\ \ \textit{при}\, j \notin \{k_n\}. \end{cases} \tag{8}$$

Доведення. Припустимо, що для точки $y_0 = \Delta^3_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k\ldots}$ має місце (7) і (8) і при цьому $f^{-1}(y_0) = \{x_1, x_2\}$, де $x_1 = \Delta^5_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$, $x_2 = \Delta^5_{\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_k\ldots}$, для яких $f(x_1) = y_0$, $f(x_2) = y_0$. Тоді $\exists k \in \mathbb{N} : \alpha_i(x_1) = \alpha_i(x_2)$ для $i = \overline{1, k-1}$, а для $i = k$ $\alpha_k(x_1) \neq \alpha'_k(x_2)$. Тоді з (7) і (6) випливає, що $\alpha_k, \alpha'_k \in A \setminus \{1, 2, 3\}$, а отже $\beta_k\left(f(x)\right) \neq \beta'_k\left(f(x')\right)$, тобто $f(x_1) - f(x_2) \neq 0$. А це суперечить умові леми. □

Лема 5. *Якщо зображення точки $y_0 = \Delta^3_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k\ldots}$ містить рівно n цифр "1", то множина $f^{-1}(y_0)$ складається з 3^n точок.*

Дане твердження є очевидним, оскільки з формул (6) випливає, що на кожному з місць, де $\beta_j(y_0) = 1$ можливі 3 альтернативи, а всі решта цифр залишаються фіксованими.

4. Диференціальні властивості функції

Теорема 2. *Функція $y = f(x)$ є ніде не диференційовною.*

Доведення. Для доведення недиференційовності достатньо показати, що для кожної точки x_0 існує така збіжна до неї послідовність (x_m), що границя

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f(x_0) - f(x_m)}{x_0 - x_m}$$

нескінченна або не існує.

Спочатку розглянемо випадок, коли x_0 — раціональна точка з простим періодом τ, тобто

$$x_0 = \Delta^5_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{k-1}\alpha_k(\tau)}.$$

Виберемо послідовність x_m таку, що

$$x_m = \Delta^5_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{k-1}\alpha_k\underbrace{\tau\ldots\tau}_{m}p(\tau)},\ p \neq \tau$$

Очевидно, що $x_m \to x_0$ при $m \to \infty$.

Тоді,

$$x_0 - x_m = \frac{\tau - p}{5^{k+m+1}},$$

$$f(x_0) - f(x_m) = \frac{u_\tau - u_p}{3^{k+m+1}} + \frac{1}{3^{k+m+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n - u'_n}{3^n},$$

де

$u_\tau = \beta_{k+m+1}\left(f(x_0)\right)$, $u'_\tau = \beta_{k+m+1}\left(f(x_m)\right)$,

$u_n = \beta_n\left(f(x_0)\right)$, $u'_n = \beta_n\left(f(x_m)\right)$ $(n = k + m + 2, k + m + 3 \ldots)$.

Розглянемо випадки

1) якщо $c_{k+m+2}(x_0) = c_{k+m+2}(x_m)$, то

$$f(x_0) - f(x_m) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \gamma(\tau) = \gamma(p), \\ \dfrac{\gamma(\tau) - \gamma(p)}{3^{k+m+1}}, \text{ якщо } c_{k+m+2} = 0, \\ -\dfrac{\gamma(\tau) - \gamma(p)}{3^{k+m+1}}, \text{ якщо } c_{k+m+2} = 1. \end{cases}$$

Таким чином,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f(x_0) - f(x_m)}{x_0 - x_m} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \gamma(\tau) = \gamma(p), \\ \infty, \text{ якщо } c_{k+m+2} = 0, \\ -\infty, \text{ якщо } c_{k+m+2} = 1; \end{cases}$$

2) якщо $c_{k+m+2}(x_0) \neq c_{k+m+2}(x_m)$, то

$$f(x_0) - f(x_m) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \gamma_\tau = \gamma_p, \\ \dfrac{1 - \gamma(p)}{3^{k+m+1}}, \text{ якщо } \tau = 2, \\ \dfrac{2\gamma(\tau) - 2}{3^{k+m+1}}, \text{ якщо } p = 2. \end{cases}$$

Отже,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f(x_0) - f(x_m)}{x_0 - x_m} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \gamma(\tau) = \gamma(p), \\ \infty, \text{ якщо } \gamma(\tau) \neq \gamma(p). \end{cases}$$

Таким чином, функція $y = f(x)$ в точці x_0 не має скінченної похідної.

Нехай тепер x_0 — довільне ірраціональне число. Тоді існує нескінченна послідовність (m_k) місць цифр числа x_0, для яких $\alpha_{m_k}(x_0) \neq 2$. Розглянемо послідовність (x_k) таку, що $\alpha_i(x_k) = \alpha_i(x_0)$ при $i \neq m_k$, а при $i = m_k$

$$\alpha_{m_k}(x_k) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \alpha_{m_k}(x_0) = 1, \\ 1, \text{ якщо } \alpha_{m_k}(x_0) = 0, \\ 3, \text{ якщо } \alpha_{m_k}(x_0) = 4, \\ 4, \text{ якщо } \alpha_{m_k}(x_0) = 3. \end{cases}$$

Очевидно, що $x_k \to x_0$ при $k \to \infty$. Тоді

$$x_0 - x_k = \frac{\alpha_{m_k}(x_0) - \alpha_{m_k}(x_k)}{5^k} = \pm\frac{1}{5^{m_k}},$$

$$f(x_0) - f(x_k) = \frac{\beta_{m_k}(f(x_0)) - \beta_{m_k}(f(x_k))}{3^{m_k}} = \pm\frac{1}{3^{m_k}}.$$

А отже

$$\frac{f(x_0) - f(x_k)}{x_0 - x_k} = \pm\left(\frac{5}{3}\right)^{m_k}$$

Тому границя останнього відношення або не існує, або дорівнює $\pm\infty$. Тобто в жодному з випадків функція скінченної похідної не має. $\square$

5. Самоафінні властивості функції.

Теорема 3. *Графік функції* $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in [0,1]\}$ *є самоафінною множиною, причому* $\Gamma_f = \bigcup_{i=1}^{5} \phi_i(\Gamma_f)$, *де*

$$\phi_i = \begin{cases} x' = \frac{1}{5}x + \frac{i-1}{5}, \\ y' = \frac{(-1)^{\left[\frac{i-3}{3}\right]+\left[\frac{i-4}{3}\right]}}{3} y + \frac{i - 2[\frac{i}{4}] - 1}{3}. \end{cases} \tag{9}$$

Доведення. Нехай $G \equiv \phi_1(\Gamma_f) \cup \phi_2(\Gamma_f) \cup \phi_3(\Gamma_f) \cup \phi_4(\Gamma_f) \cup \phi_5(\Gamma_f)$. Доведемо, що $\Gamma_f = G$.

Для цього спочатку покажемо, що $G \subset \Gamma_f$. Розглянемо довільну точку $M \in G$. Тоді існує i таке, що $M \in \phi_i(\Gamma_f)$, тобто

$$\begin{cases} x_M = x' = \frac{1}{5}x + \frac{i-1}{5}, \\ y_M = y' = \frac{(-1)^{\left[\frac{i-3}{3}\right]+\left[\frac{i-4}{3}\right]}}{3} y + \frac{i - 2[\frac{i}{4}] - 1}{3}. \end{cases}$$

Легко довести, що $y_M = f(x_M)$, тобто $M \in \Gamma_f$.

Покажемо тепер, що $\Gamma_f \subset G$. Нехай $M \in \Gamma_f$, тобто $M(x, f(x))$ і $\alpha_1(x) = i - 1$, $i = \overline{1,5}$. Тоді

$$x = \Delta^5_{i-1\,\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots} = \frac{i-1}{5} + \frac{1}{5}x,$$

а тому

$$f(x) = \frac{(-1)^{\left[\frac{i-3}{3}\right]+\left[\frac{i-4}{3}\right]}}{3} y + \frac{i - 2[\frac{i}{4}] - 1}{3}.$$

Отже, $M \in \phi_i(\Gamma_f)$. $\square$

Властивість 1.

$$f\left(\frac{i+x}{5^k}\right) = \begin{cases} \frac{\gamma(i)}{3^k} + \frac{1}{3^k} f(x), & \textit{якщо } i \in A \setminus \{2\}, \\ \frac{\gamma(2)}{3^k} - \frac{1}{3^k} f(x), & \textit{якщо } i = 2; \end{cases} \tag{10}$$

Доведення. Розглянемо випадки:

1) нехай $i \in A \setminus \{2\}$, тоді

$$f\left(\frac{i+x}{5^k}\right) = f\left(\Delta_{\underbrace{0\ldots0}_{k-1} i\,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}\right) = \frac{\gamma(i)}{3^k} + \frac{\beta_1}{3^{k+1}} + \ldots + \frac{\beta_k}{3^{k+n}} + \ldots = \frac{\gamma(i)}{3^k} + \frac{1}{3^k} f(x)\ ;$$

2) нехай $i = 2$, тоді

$$f\left(\frac{i+x}{5^k}\right) = f\left(\Delta_{\underbrace{0\ldots0}_{k-1}\,2\,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}\right) = \frac{\gamma(2)}{3^k} + \frac{\beta_1}{3^{k+1}} + \ldots + \frac{\beta_k}{3^{k+n}} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{3^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-\beta_n}{3^{k+n}} = \frac{1}{3^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} - \frac{1}{3^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{3^n} = \frac{2}{3^k} - \frac{1}{3^k} f(x).$$

□

Властивість 2. *Функція $f(x)$ задовольняє наступне функціональне рівняння:*

$$f(1-x) = 1 - f(x) \tag{11}$$

Доведення. Нехай $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{5^k}$, тоді

$$1 - x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{5^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{5^k} = \Delta^5_{(4-\alpha_1)(4-\alpha_2)\ldots(4-\alpha_k)\ldots}$$

Розглянемо 2 випадки:

1) якщо представлення точки x не містить жодного коефіцієнта $\alpha_k = 2$, тоді

$$f(1-x) = \Delta^3_{\gamma(4-\alpha_1)\gamma(4-\alpha_2)\ldots\gamma(4-\alpha_k)\ldots},$$

$$1 - f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2-\gamma(\alpha_k)}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma(4-\alpha_k)}{3^k} = \Delta^3_{\gamma(4-\alpha_1)\gamma(4-\alpha_2)\ldots\gamma(4-\alpha_k)\ldots}$$

Отже, $f(1-x) = 1 - f(x)$.

2) Позначимо $u = f(1-x)$, $v = 1 - f(x)$, тоді:

а) якщо в представленні точки x до $(k-1)-$ го місця включно міститься $(2m)$ коефіцієнтів $\alpha = 2$, тоді $\beta_k(u) = \gamma(4-\alpha_k)$, $\beta_k(v) = 2 - \gamma(\alpha_k) = \gamma(4-\alpha_k) \Rightarrow f(1-x) = 1 - f(x)$;

б) якщо в представленні точки x до $(k-1)-$ го місця включно міститься $(2m-1)$ коефіцієнтів $\alpha = 2$, тоді $\beta_k(u) = 2-\gamma(4-\alpha_k) = \gamma(\alpha_k)$, $\beta_k(v) = 2-(2-\gamma(\alpha_k)) = \gamma(\alpha_k)$.

Отже, $f(1-x) = 1 - f(x)$. □

Наслідок 2. *Для інтеграла Лебега має місце рівність*

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$$

Доведення. З властивості 2 маємо: $f(1-x) = 1 - f(x) \Rightarrow f(x) = 1 - f(1-x)$.

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (1 - f(1-x))dx \;\Rightarrow\; \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}.$$

□

6. Функція Серпінського

В 1914 році, польським математиком В.Серпінським, було розглянуто приклад неперервної недиференційовної функції, яка означалася наступним чином

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{5^n}, \;\; a_n \in \{0,1,2,3,4\}, \tag{12}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{3^n}, \tag{13}$$

де

$$\beta_n = \varepsilon_n (a_n - 2E\frac{a_n}{3}), \qquad |\beta_n| \le 2, \tag{14}$$

$E\frac{a_n}{3}$ — ціла частина від $\frac{a_n}{3}$;
$\varepsilon_n = 1$ для $n = 1$ або якщо жоден з коефіцієнтів $\alpha_k \neq 2$ $(k = \overline{1, n-1})$, або коефіцієнтів $\alpha_k = 2$ парна кількість;
$\varepsilon_n = -1$, якщо непарна кількість разів виконується рівність $\alpha_k = 2$ $(k = \overline{1, n-1})$.

Формулу (14) можна переписати у вигляді

$$\beta_n \left(g(x)\right) = \varepsilon_n \cdot \begin{cases} 0, \text{ якщо } \alpha_n = 0, \\ 1, \text{ якщо } \alpha_n \in \{1,3\}, \\ 2, \text{ якщо } \alpha_n \in \{2,4\}; \end{cases} \tag{15}$$

Теорема 4. *Функції $f(x)$ і $g(x)$ еквівалентні.*

Доведення. Оскільки функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні, то для доведення достатньо показати, що ці функції на кожному з циліндричних відрізків мають однакові прирости.

Розглянемо випадки:

1) якщо в зображенні числа x всі цифри $\alpha_i \in A \setminus \{2\}$ $(i = \overline{1, k})$, то згідно (5) і (15) очевидно, що $\mu_f(\Delta^5_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}) = \frac{1}{3^k} = \mu_g(\Delta^5_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k})$;

2) якщо в зображенні числа x кількість цифр $\alpha_i = 2$ $(i = \overline{1, k})$ є парною, то з леми 1 випливає, що $\mu_f(\Delta^5_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}) = \frac{1}{3^k}$. І з формул (15)

$$\mu_g(\Delta^5_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}) = \frac{1}{3^k}.$$

3) Нехай в представленні числа x до k- го місця включно кількість цифр $\alpha_k = 2$ є непарною, то з леми1 випливає, що $\mu_f(\Delta^5_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}) = -\frac{1}{3^k}$.

Використовуючи формули (15) і враховуючи, що для даного випадку $\varepsilon = -1$, маємо

$$\mu_g(\Delta^5_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}) = -\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = -\frac{1}{3^k}.$$

Отже, $f(x) = g(x)$ $\square$

Література

[1] Sierpiński W. Arytmetyczny przykład funkcji ciągłej, nieróżniczkowalnej // Wektor. — 1914. — nr 8. — Str. 337–343.

[2] *X.L. Yang* Construction of the Kiesswetter-like Fractal Functions(I).//Southeast Asian Bulletin of Mathematics. 2002.— 26— C. 865-875.

[3] *Працьовитий М. В.* Фрактальні властивості однієї неперервної ніде не диференційовної функції Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. 2002. — № 3, — С. 351-362.

[4] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[5] *Працьовитий М.В.*Фрактальні властивості одного класу неперервних ніде не диференційовних функцій/ М.В. Працьовитий // Перша міжнародна науково-практична конференція ко "Відкриті еволюціонуючі системи 26-27 квітня 2002 р.: матеріали конференції.— Київ: ВМУРоЛ, 2002.— С. 153-155.

[6] *Працьовитий М.В.* Диференціальні і фрактальні властивості одного класу самоафінних функцій /М.В. Працьовитий, О.Б. Панасенко // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична.— 2009. — Т. 70.— С. 128-139.

[7] *Турбин А. Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. К.: Наукова думка, 1992. — 208 с.

[8] *Коваль В. В.* Самоафінні графіки функцій. Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. 2003 . — № 4, — С. 241-249.

[9] *Козырев С. Б.* О топологической густоте извивающихся функций.// Мат. заметки.— 1983. — 33, — №1.— С. 71-76

[10] *Панасенко О. Б.* Фрактальна властивості одного класу однопараметричних неперервних недиференційовних функцій // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.— К.: НПУ імені М.П.Драгоманова. — 2006. — № 7. — С. 160–167.

[11] *Кравченко В.Ф.* Новый класс фрактальных функций в задачах анализа и синтеза антенн /В.Ф. Кравченко, В.М.Масюк. — Москва: Радиотехника, 2002. — 80 С..

[12] *Шкаравская О.Ю.* Аффинные отображения, задаваемые конечными преобразователями //Кибернетика и системный анализ.— 1998. — № 5. — С. 178–181