Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2009, № 10.— С. 141–149.

УДК 511.72

Циліндричне марковське зображення чисел і його застосування

В. В. Луцак
(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова)

Анотація. Вивчається зображення дійсних чисел зі скінченним алфавітом і нульовою надлишковістю, основне метричне відношення для якого визначається стохастичною матрицею. Розв'язуються найпростіші задачі метричної і ймовірнісної теорії дійсних чисел для цього зображення.

Abstract. We study the representation of real numbers with finite alphabet and zero redundancy such that the basic metric relation is determined by the stochastic matrix. Simplest problems of metric and probabilistic theory of real numbers for this representation are solved.

1. Вступ

Сьогодні в математиці використовуються різні зображення (кодування) дійсних чисел зі скінченним та нескінченним алфавітами, визначені односторонньою чи двостронньою числовою послідовністю (знакододатною чи знакозмінною) тощо. Одні системи числення породжують простішу, а інші — складнішу геометрію. Кожна система зображення чисел має свої переваги та слабкі сторони в плані використання для задання та дослідження різних математичних об'єктів (множин, функцій, операторів, динамічних систем та ін.), які мають фрактальні властивості.

У даній роботі ми досліджуємо так зване марковське зображення, яке є узагальненням s-адичного [**6**] та Q-зображення [**4**], а також узагальненням зображення, запропонованого в [**8**]. Геометрія (геометричний зміст цифр, властивості циліндричних множин, метричні відношення тощо) даного зображення є складнішою, ніж геометрія Q-зображення, і залежить від $s^2 - s$ параметрів. Природність цього зображення і вибір терміну для нього обумовлена тим, що зображення функції розподілу випадкової величини, s-кові цифри якої мають марковську залежність (утворюють однорідний ланцюг Маркова) з вектором початкових ймовірностей p_0, p_1,..., p_{s-1} і матрицею перехідних ймовірностей $||p_{ij}||$, в яких відсутні нулі, є марковським [**1**].

За методологічну основу даного дослідження ми приймаємо схему, якою попередники користувались при вивченні Q- та Q^*-зображень дійсних чисел, і вказуємо на найпростіші застосування даного зображення у теорії ймовірності та фрактальному аналізі.

2. Циліндричне марковське зображення чисел

Нехай $2 \leq s$ — фіксоване натуральне число, $A = \{0, 1, 2, ..., s-1\}$ — алфавіт, $\vec{q} = (q_0, q_1, ..., q_{s-1})$ — стохастичний вектор ($q_i > 0$, $q_0 + q_1 + ... + q_{s-1} = 1$),
$$G = \|q_{ij}\| = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} & \cdots & q_{0(s-1)} \\ q_{10} & q_{11} & \cdots & q_{1(s-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{(s-1)0} & q_{(s-1)1} & \cdots & q_{(s-1)(s-1)} \end{pmatrix} \text{— стохастична матриця,}$$
тобто $q_{i0} + q_{i1} + ... + q_{i,(s-1)} = 1 \; \forall i \in A$, яка не містить нулів ($q_{ij} > 0$).

Розглянемо систему подрібнюючих розбиттів відрізка $[0, 1]$
$$[0, 1] = \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup ... \cup \Delta_{s-1},$$
де $\Delta_0 = [0, q_0]$, $\Delta_i = [q_o + ... + q_{i-1}, q_0 + ... + q_{i-1} + q_i]$, $i = 1, ..., s-1$.

Визначимо систему відрізків n-го рангу
$$\Delta_{a_1...a_n}, \quad \text{де} \;\; a_n \in A, \;\; n \in N$$
наступними умовами:

(1) $\Delta_{a_1...a_n} = \Delta_{a_1...a_n0} \cup ... \cup \Delta_{a_1...a_n(s-1)}$;
(2) $\max \Delta_{a_1...a_ni} = \min \Delta_{a_1...a_n(i+1)}$, $\forall i = \overline{0, s-2}$;
(3) $\dfrac{|\Delta_{a_1...a_nij}|}{|\Delta_{a_1...a_ni}|} = q_{ij}$.

Відрізок $\Delta_{a_1...a_n}$ називатимемо *циліндром рангу n з основою $a_1...a_n$*. Інтервал з тими ж самими кінцями, що й $\Delta_{a_1...a_n}$, позначатимемо через $\nabla_{a_1...a_n}$.

Лема 1. *Довжина циліндра $\Delta_{a_1...a_n}$ обчислюється за формулою*
$$|\Delta_{a_1...a_n}| = q_{a_1} \prod_{i=1}^{n-1} q_{a_i a_{i+1}}.$$

Доведення. З властивості (3) циліндрів n-го рангу маємо:
$$|\Delta_{a_1...a_n}| = q_{(n-1)n} |\Delta_{a_1...a_{n-2}a_{n-1}}| = q_{(n-1)n} q_{(n-2)(n-1)} |\Delta_{a_1...a_{n-2}}| = ... =$$

$$= q_{(n-1)n}q_{(n-2)(n-1)} \cdots q_{a_2a_3}q_{a_1a_2}|\Delta_{a_1}| = q_{(n-1)n}q_{(n-2)(n-1)} \cdots q_{a_2a_3}q_{a_1a_2}q_{a_1} =$$

$$= q_{a_1} \prod_{i=1}^{n-1} q_{a_ia_{i+1}}.$$

□

Наслідок 1. *Для довільної послідовності (a_n), $a_n \in A$, існує границя*

$$|\Delta_{a_1 \dots a_n}| \to 0 \ \textit{при} \ n \to \infty.$$

Це твердження випливає з того, що

$$|\Delta_{a_1 \dots a_n}| \le \left(\max_i q_i\right) \cdot \left(\max_{i,j}\{q_{ij}\}\right)^{n-1} \to 0 \quad (n \to \infty.)$$

Лема 2. *Для довільної послідовності (a_n), де $a_n \in A$, існує єдина точка $x \in [0,1]$, така, що належить всім циліндрам послідовності*

$$\Delta_{a_1}, \ \Delta_{a_1a_2}, \ \dots, \ \Delta_{a_1a_2 \dots a_n} \dots,$$

тобто

$$x = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{a_1a_2 \dots a_n} \equiv \Delta_{a_1a_2 \dots a_n \dots}.$$

Доведення. Дане твердження випливає із заданих властивостей відрізків $\Delta_{a_1 \dots a_m}$, наслідку 1 і аксіоми Кантора. □

Лема 3. *Має місце рівність*

$$x = \Delta_{a_1 \dots a_n \dots} = \beta_{a_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{a_ka_{k+1}} \prod_{j=1}^{k-1} q_{a_ja_{j+1}}, \tag{1}$$

$$\textit{де} \ \ \beta_{a_1} = \sum_{i=0}^{a_1-1} q_i, \quad \beta_{a_ka_{k+1}} = q_{a_1} \sum_{i=0}^{a_{k+1}-1} q_{a_ki}. \tag{2}$$

Доведення. Справді,

$$x = \sum_{i=0}^{a_1-1} |\Delta_i| + \sum_{i=0}^{a_2-1} |\Delta_{a_1i}| + \sum_{i=0}^{a_3-1} |\Delta_{a_1a_2i}| + \dots =$$

$$= \sum_{i=0}^{a_1-1} q_i + \sum_{i=0}^{a_2-1} q_{a_1i}q_{a_1} + \sum_{i=0}^{a_3-1} q_{a_2i}q_{a_1a_2}q_{a_1} + \dots + \sum_{i=0}^{a_{k+1}-1} q_{a_ki} \prod_{j=1}^{k-1} q_{a_j}q_{a_{j+1}}q_{a_1} + \dots =$$

$$= \beta_{a_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{a_ka_{k+1}} \prod_{j=1}^{k-1} q_{a_ja_{j+1}}.$$

□

Теорема 1. *Для довільного $x \in [0;1]$ існує послідовність (a_n), $a_n \in A$ така, що має місце рівність* (1).

Доведення. Використовуючи властивості циліндрів, легко бачити, що для довільного $x \in [0;1]$ існує система вкладених відрізків Δ_{a_1}, $\Delta_{a_1a_2}$, ..., $\Delta_{a_1a_2\ldots a_n}$, які містять x. Згідно з лемою 2, їх переріз співпадає з точкою x, тобто

$$x = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{a_1a_2\ldots a_n} \equiv \Delta_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}\ .$$

$\square$

Символічний запис $\Delta_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$ виразу (1) називатимемо *G-марковським зображенням числа x*. При цьому елемент алфавіту a_n називається *n-ою цифрою (символом)* даного G-марковського зображення або *G-символом x*.

Легко бачити, що при

$$q_i = \frac{1}{s} = q_{ij} \quad \forall i \in A,\ \forall j \in A$$

G-марковське зображення є s-ковим зображенням, а при $q_{ij} = q_j$ — Q-зображенням [**1, 2, 4, 6**]. Тому марковське зображення є узагальненням Q-зображення.

Легко довести, що деякі числа відрізка $[0;1]$ мають два G-марковських зображення:

$$\Delta_{c_1\ldots c_n(0)} = \Delta_{c_1\ldots c_{n-1}(c_n-1)((s-1))},$$

де під записом (c) ми розуміємо період, який складається з цифри c. Такі числа ми називаємо *G-раціональними*. Зрозуміло, що G-раціональні числа, взагалі кажучи, не є раціональними. Але, коли всі елементи матриці $\|q_{ij}\|$ і координати стохастичного вектора $\vec{q}$ є раціональними, то G-раціональне число є раціональним. Лекго навести приклад, який показує, що обернене твердження неправильне.

3. Множини чисел з обмеженнями на вживання цифр

Нехай (V_n) — послідовність підмножин A. Через $C = C[\Delta, (V_n)]$ будемо позначати множину всіх чисел з відрізка $[0, 1]$, для яких n-ий символ набуває значень з множини V_n, тобто

$$C = C[\Delta, (V_n)] = \{x : x = \Delta_{a_1a_2\ldots a_n,\ldots}, a_n \in V_n \subseteq A\}.$$

Теорема 2. *Міра Лебега множини C, обчислюється за формулами*

$$\lambda(C) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_n)}{\lambda(F_{n-1})} = \tag{3}$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\bar{F_n})}{\lambda(F_{n-1})}\right), \tag{4}$$

де $F_0 = [0,1]$, F_n– об'єднання цилінрів рангу n, серед внутрішніх точок яких є точки множини C, $\bar{F}_n = F_{n-1} \setminus F_n$.

Доведення. Зрозуміло, що F_n – це замкнена множина, $C \subset F_n$ для довільного $n \in N$, $C = \lim\limits_{n\to\infty} F_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, $\lambda(C) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda(F_n)$,
і

$$\lambda(F_n) = \lambda(F_{n-1}) - \lambda(\bar{F}_n), \tag{5}$$

причому

$$\bar{F}_n = \begin{cases} \varnothing & \text{, якщо } V_n = A, \\ \bigcup\limits_{v_1\in V_1} \dots \bigcup\limits_{v_{n-1}\in V_{n-1}} \bigcup\limits_{w_n\in A\setminus V_n} \nabla_{v_1\dots v_{n-1}w_n}. & \end{cases}$$

Оскільки $F_n = \bigcup\limits_{v_1\in V_1} \cdots \bigcup\limits_{v_{n-1}\in V_{n-1}} \bigcup\limits_{v_n\in A\setminus V_n} \Delta_{v_1\cdots v_{n-1}v_n}$,
то

$$\lambda(F_n) = \frac{\lambda(F_n)}{\lambda(F_{n-1})} \cdot \frac{\lambda(F_{n-1})}{\lambda(F_{n-2})} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda(F_2)}{\lambda(F_1)} \cdot \frac{\lambda(F_1)}{\lambda(F_0)} =$$
$$= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})}.$$

Тоді

$$\lambda(C) = \lim_{n\to\infty} \lambda(F_n) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})}.$$

Рівність (3) доведено.

Враховуючи (5), отримуємо

$$\lambda(C) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_{k-1}) - \lambda(\bar{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})} =$$
$$= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\bar{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})}\right),$$

що й вимагалося довести. □

Наслідок 2. *Рівність $\lambda(C) = 0$ рівносильна рівності*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(\bar{F}_n)}{\lambda(F_{n-1})} = \infty \tag{6}$$

Доведення. Дане твердження є наслідком теореми 2 і твердження про взаємозв'язок між розбіжністю нескінченних добутків і рядів. □

Теорема 3. *Рівність $\lambda(C) = 0$ має місце тоді і тільки тоді, коли послідовність (V_n) має властивість $V_n \neq A$ для нескінченної множини значень n.*

Доведення. Нехай множина $\{n : V_n \neq A\}$ є нескінченною і для кожного члена послідовності (n_k)
$$V_{n_k} \neq A.$$
Тоді
$$\frac{\lambda(\bar{F_{n_k}})}{\lambda(F_{n_k-1})} \geq q_{\min}$$
і
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(\bar{F_{n_k}})}{\lambda(F_{n_k-1})} \neq 0.$$
Отже, не виконується необхідна умова збіжності ряду (6), тобто він розбігається і дає, згідно з наслідком теореми 2 $\lambda(C) = 0$.

Нехай $\lambda(C) = 0$. Доведемо, що послідовність (V_n) має властивість $V_n \neq A$ для нескінченної множини значень n. Для цього скористаємося методом від супротивного.

Якщо припустити, що для всіх n, більших деякого n_0, $V_n = A$, то $F_n = F_{n-1}$ для всіх $n > n_0$ і
$$\frac{\lambda(F_n)}{\lambda(F_{n-1})} = 1,$$
а отже, добуток (1) збігається і, згідно з теоремою 2, $\lambda(C) > 0$, що суперечить умові $\lambda(C) = 0$. □

Наслідок 3. $\lambda(C[\Delta, V]) = 0$ *тоді і тільки тоді, коли* $V \neq A$, *де* $V = V_n$ *для всіх* $n \in N$.

4. Деякі застосування до дослідження ймовірнісних мір

Теорема 4. *Якщо випадкова величина* $\xi = \Delta_{\eta_1\eta_2\ldots\eta_k\ldots}$ *рівномірно розподілена на* $[0; 1]$, *то* G*-символи* η_k *її заданого марковського зображення є залежними і утворюють однорідний ланцюг Маркова з початковими ймовірностями*
$$p_0 = q_0, \quad p_1 = q_1, \ \ldots, \quad p_{s-1} = q_{s-1}$$
і матрицею перехідних ймовіностей $||p_{ij}|| = q_{ij}$.

Доведення. Оскільки ξ рівномірно розподілена на $[0; 1]$, то
$$\mathbb{P}\{\xi \in [a, b]\} = \mathbb{P}\{\xi \in (a, b)\} = b - a,$$
зокрема,
$$\mathbb{P}(\xi \in \Delta^{||p_{ij}||}_{c_1c_2\ldots c_m}) = |\Delta^{||p_{ij}||}_{c_1\ldots c_m}|.$$
Оскільки
$$\mathbb{P}\{\eta_1 = i\} = \mathbb{P}\{\xi \in \Delta_i\} = |\Delta_i|,$$

то

$$\mathbb{P}\{\eta_1 = i\} = q_i.$$

Тоді,

$$\mathbb{P}\{\eta_2 = j/\eta_1 = i\} = \frac{\mathbb{P}\{\eta_2 = j \wedge \eta_1 = i\}}{\mathbb{P}\{\eta_1 = i\}} = \frac{|\Delta_{ij}|}{|\Delta_i|} = \frac{q_i q_{ij}}{q_i} = q_{ij}.$$

Аналогічно,

$$\mathbb{P}\{\eta_{k+1} = j/\eta_k = i\} = \frac{\mathbb{P}\{\eta_{k+1} = j \wedge \eta_k = i\}}{\mathbb{P}\{\eta_k = i\}} = \frac{\lambda(\Delta_{ij}^{k(k+1)})}{\lambda(\Delta_i^k)} = q_{ij},$$

де $\Delta_{ij}^{k(k+1)} = \{x : g_k(x) = i, \quad g_{k+1}(x) = j\}$, що й вимагалося довести.

□

5. Фрактальний аналіз і G-марковські циліндри

Центральними поняттями фрактального аналізу і фрактальної геометрії [**4**] є поняття h-міри (зокрема α-мірної міри) Хаусдорфа і метричної розмірності Хаусдорфа-Безиковича.

Означення 1. α-мірною мірою Хаусдорфа обмеженої множини $E \subset R^1$ називається число

$$H^\alpha(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} m_\varepsilon^\alpha(E), \text{ де } m_\varepsilon^\alpha(E) = \inf_{|u_i| \le \varepsilon} \sum_i |u_i|^\alpha$$

і нижня грань обчислюється за всіма не більш ніж зліченними покриттями множини E відрізками $\{u_i\}$.

Означення 2. Розмірністю Хаусдорфа-Безиковича обмеженої множини $E \subset R^1$ називається число

$$\alpha_0(E) = \inf\{\alpha : H^\alpha(E) = 0\} = sup\{\alpha : H^\alpha(E) = \infty\}.$$

Задача обчислення (знаходження, локалізації) розмірності локально складних просторово неоднорідних множин є, взагалі кажучи, непростою. Іноді спростити її вдається звуженням класу допустимих покриттів, яке приводить до еквівалентного означення розмірності Хаусдорфа-Безиковича.

Наступні твердження обґрунтовують висновок, що при знаходженні розмірності Хаусдорфа-Безиковича множин з $[0,1]$ можна обмежитись циліндрами, що визначають марковське зображення.

Лема 4. *Нехай $q_* = min\{q_{ij}\}$, $q^* = max\{q_{ij}\}$ і $N \ni \gamma : q^{*\gamma} \le q_* < q_*^{\gamma-1}$. Для довільного інтервала $(a,b) \subset [0,1]$ існує не більше*

$$r = 2(s^\gamma + s - 1)$$

G-циліндрів, які покривають (a,b) і мають довжини, які не перевищують $b-a$.

Доведення. Нехай u – довільний інтервал, що належить $[0,1]$, $N_0 \ni m$ – такий ранг циліндра, що u не містить цілого циліндра рангу m, але цілком містить циліндр рангу $m+1$. Тоді u міститься у об'єднанні двох циліндрів рангу m, які мають спільний кінець. Нехай це циліндри $v_0 = \Delta_{d_1\ldots d_m}$ і $v_1 = \Delta_{c_1\ldots c_m}$, причому $max v_0 = min v_1$. Тоді, згідно з означенням числа m, $\Delta_{d_1\ldots d_m(s-1)} \subset u$ або $\Delta_{c_1\ldots c_m 0} \subset u$.

Нехай $u_0 = v_0 \cap u$, $u_1 = v_1 \cap u$.

Розглянемо напіввідрізок u_1. Можливі два випадки:

1) u_1 містить цілком цилідр рангу $m+1$;

2) u_1 циліндрів рангу $m+1$ не містить.

У першому випадку $\Delta_{c_1\ldots c_m 0} \subset u_1 \subset \Delta_{c_1\ldots c_m 0} \cup \ldots \cup \Delta_{c_1\ldots c_m b}$, де $0 < b \leq s-1$. Якщо $|\Delta_{c_1\ldots c_m b}| \leq |u_1|$, то об'єднання $b+1$ циліндра рангу $m+1$ покриває u_1 і кожен з них має довжину, яка менша за довжину циліндра u_1. Якщо ж $|\Delta_{c_1\ldots c_m b}| > |u_1|$, то розглянемо циліндри рангу $m+2$, які містяться в циліндрі $\Delta_{c_1\ldots c_m b}$.

$$\Delta_{c_1\ldots c_m b} = \Delta_{c_1\ldots c_m b0} \cup \ldots \cup \Delta_{c_1\ldots c_m b(s-1)}.$$

Якщо кожен з цих циліндрів має довжину не більшу за довжину u_1, то u_1 покривається сукупністю b циліндрів рангу $m+1$ і $(s-1)$ циліндрів рангу $m+2$ (яких, взагалі кажучи, взято з надлишком). Якщо серед даних циліндрів рангу $m+2$ знайдеться циліндр з довжиною, яка більша за $|u_1|$, то розглядаємо всі циліндри $(m+3)$-го рангу, які належать $\Delta_{c_1\ldots c_m b}$ і т.д.

Всі циліндри рангу $m+\gamma$, що належать $\Delta_{c_1\ldots c_m b}$, гарантовано мають довжину, яка не перевищує $|u_1|$, оскільки

$$|\Delta_{c_1\ldots c_m b\alpha_{m+2}\ldots\alpha_{m+\gamma}}| = q_{c_m b} \cdot \ldots \cdot q_{\alpha_{m+\gamma-1}\alpha_{m+\gamma}} \cdot |\Delta_{c_1\ldots c_m}| \leq$$
$$\leq q^{*\gamma} |\Delta_{c_1\ldots c_m}| \leq q_* |\Delta_{c_1\ldots c_m}| \leq q_{c_m 0} |\Delta_{c_1\ldots c_m}| = |\Delta_{c_1\ldots c_m 0}| \leq |u_1|.$$

Тоді сукупність b циліндрів рангу $m+1$ і s^γ циліндрів рангу $m+\gamma$ покриває u_1, і всі ці циліндри мають довжину, яка менша за $|u_1|$. Оскільки $b \leq s-1$, то для покриття напіввідрізка u_1 достатньо $s^\gamma + s - 1$ G-циліндрів, довжини яких не перевищують $|u_1|$.

У другому випадку $u_1 \subset \Delta_{c_1\ldots c_m 0}$. Тоді існує $k \in N$ таке, що

$$\Delta_{c_1\ldots c_m \underbrace{0\ldots 0}_{k}} \subset u_1 \subset \Delta_{c_1\ldots c_m \underbrace{0\ldots 0}_{k-1}}.$$

Далі досить повторити міркування попереднього випадку, при цьому роль циліндра $\Delta_{c_1\ldots c_m 0}$ відіграватиме циліндр $\Delta_{c_1\ldots c_m \underbrace{0\ldots 0}_{k}}$.

Отже, для покриття напіввідрізка u_1 достатньо $s^\gamma + s - 1$ G-циліндрів, довжини яких не перевищують $|u_1|$, а отже, і $|u|$.

Аналогічними міркуваннями можна довести, що для покриття півінтервала u_0 теж досить не більше $s^\gamma + s - 1$ G-циліндрів, довжини яких не перевищують $|u_0|$, а отже, і $|u|$.

Тоді, для довільного інтервала $u \subset [0,1]$ існує не більше $2(s^\gamma + s - 1)$ G-циліндрів, які покривають u і мають довжини, які не перевищують $|u|$. □

Теорема 5. *Для будь-якої множини $E \subset [0,1]$ виконується нерівність:*

$$H^\alpha(E) \le \widehat{H}^\alpha(E) \le r \cdot H^\alpha(E),$$

де $\widehat{H}^\alpha(E)$ – α-мірна міра Хаусторфа через покритя G циліндрами.

Доведення. Ліва нерівність є очевидною, а права є наслідком попередньої леми. □

Література

[1] *Працьовитий М.В.* Фрактальні властивості розподілів випадкових величин, Q-знаки яких утворюють однорідний ланцюг Маркова // Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій. — Київ: Ін-т математики АН України, 1994. — С.245-254.

[2] *Працьовитий М.В.* Канторовість і фрактальні властивості розподілів випадкових величин, Q-знаки яких утворюють однорідний ланцюг Маркова // Теорія ймовірностей та мат. статистика. — 1998. — № 58. — С.139-148.

[3] *Працьовитий М.В.* Фрактальні властивості спектра розподілу випадкової величини, Q_∞-знаки якої утворюють однорідний ланцюг Маркова // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — Київ: ІМ НАН України - НПУ імені М.П.Драгоманова. — 1998. — № 2. — С.36-48.

[4] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296 с.

[5] *Працьовитий М.В.* Сингулярні і фрактальні властивості розподілів випадкових величин, цифри поліосновного зображення яких утворюють однорідний ланцюг Маркова // Укр. мат. журн. — 2000. — 52, № 3. — С.368-374.

[6] *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук.думка, 1992. — 208с.

[7] *Працьовитий М.В., Фещенко О.Ю.* Математичні моделі двосторонніх динамічних конфліктів і Q-представлення чисел // Наукові записки НПУ імені М.П.Драгоманова. Фізико-математичні науки. — № 4, 2003. — С. 260-269.

[8] *Працьовитий О.М.* Про один специфічний спосіб кодування дійсних чисел та його застосування // Студентські фізико-математичні етюди, 2008, № 7. — С. 57-67.

[9] *Albeverio S., Pratsiovytyi N. , Torbin G.* Singular probability distributions and fractal properties of sets of real numbers defined by the asymptotic frequencies of their s-adic digits // Укр. мат. журн. — 2005, 57, 9. — 1163-1170.