*Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2009, № 10.— С. 150–162.

УДК 519.21

# Множина неповних сум абсолютно збіжного комплексного ряду

В. М. Коваленко
(Бердянський державний педагогічний університет)

Анотація. В роботі розглядається множина неповних сум абсолютно збіжного комплексного ряду. Вивчаються тополого-метричні властивості даної множини.

Abstract. In this paper we consider the set of incomplete sums of absolutely convergent complex series. We investigate topological and metric properties of this set.

Нехай задано абсолютно збіжний комплексний ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k. \tag{1}$$

Ряд (1) визначає в комплексній площині $\mathbb{C}$ наступну множину:

$$S = \{z : z = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k c_k, \varepsilon_k \in \{0,1\}\}, \tag{2}$$

яку називатимемо *множиною неповних сум ряду* (1).

Як випливає з означення множини $S$, довільна її точка $z = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k c_k$ відповідає деякій послідовності $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Очевидно, що відповідність

$$\sigma : \quad (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \dots) \to \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k c_k \tag{3}$$

є сюр'єктивним відображенням множини $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ на множину $S$. Той факт, що точка $z \in S$ є образом послідовності $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ при відображенні $\sigma$ (тобто $z = \sigma(\varepsilon)$) будемо відображати символічним записом $z = z_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k \dots}$.

В роботах [**7**], [**9**], [**10**] фактично проводилось дослідження властивостей множини $S$ для часткового випадку: $c_k = \lambda^k,\ \lambda \in \mathbb{C},\ 0 < |\lambda| < 1$. В цьому випадку множина $S$ є атрактором системи ітерованих функцій: $\{\lambda z, \lambda z + \lambda\}$. Оскільки відображення $f_0(z) = \lambda z$ та $f_1(z) = \lambda z + \lambda$ задають перетворення подібності комплексної площини, то множина $S$ в цьому випадку є самоподібною, що і використовувалось авторами вказаних вище робіт.

В даній роботі ми проводимо дослідження властивостей множини $S$ для довільного абсолютно збіжного ряду (1), всі члени якого не дорівнюють нулю.

**Теорема** 1. *Множина $S$ є компактною.*

Доведення. Нам достатньо показати, що $S$ замкнена та обмежена. Обмеженість випливає з очевидної нерівності для довільної точки $z = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k c_k$ множини $S$:

$$|z| = |\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k c_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\varepsilon_k c_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty. \tag{4}$$

Доведемо тепер, що $S$ замкнена. Розглянемо функціонал

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k, \tag{5}$$

визначений на комплексному просторі $l_1$, елементами якого є послідовності комплексних чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$ з нормою $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|$. Як відомо ([**2**], [**6**]), якщо послідовність $\{a_n\}$ обмежена, то функціонал $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ є неперервним лінійним функціоналом на просторі $l_1$. Оскільки стаціонарна послідовність $\{1, 1, \ldots, 1, \ldots\}$ є обмеженою, то $f(x)$ є неперервним лінійним функціоналом на $l_1$.

Введемо позначення $Z_k = \{0, c_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ і розглянемо наступну множину:

$$E = \prod_{k=1}^{\infty} Z_k = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots) : \ \xi_k \in Z_k\}. \tag{6}$$

Вона є підмножиною комплексного простору $l_1$ оскільки для довільної її точки $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots)$ маємо:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |y_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| = M < \infty.$$

Очевидно, що $f(E) = S$. Доведемо, що множина $E$ замкнена. Для цього нам достатньо показати, що для довільної збіжної послідовності $\{x^{(n)}\}$ точок множини $E$, її границя $x$ також належить множині $E$. Нехай $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$. Оскільки $x$ – границя послідовності $\{x^{(n)}\}$, то $\|x^{(n)} - x\|_1 \to 0$ при $n \to \infty$. Переходячи у нерівності

$$0 \leq |x_m^{(n)} - x_m| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k| = \|x^{(n)} - x\|_1$$

до границі при $n \to \infty$ та довільному фіксованому $m$, матимемо

$$\lim_{n\to\infty} |x_m^{(n)} - x_m| = 0.$$

Звідки

$$\lim_{n\to\infty} x_m^{(n)} = x_m, \quad m = 1, 2, \dots$$

Таким чином, $x_m$ є границею послідовності $\{x_m^{(n)}\} \subset Z_m$. Оскільки множина $Z_m$ замкнена, то $x_m \in Z_m$ $(m = 1, 2, \dots)$. Тоді

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m, \dots) \in \prod_{m=1}^{\infty} Z_m = E,$$

і, значить, множина $E$ замкнена. Звідси, враховуючи, що $S = f(E)$ і відображення $f$ є неперервним, випливає замкненість множини $S$. □

Для дослідження властивостей множини $S$ зручно ввести в розгляд наступне пов'язане з нею поняття.

*Означення* 1. Циліндричною множиною рангу $k$ з основою $(\delta_1, \dots, \delta_k)$ називатимемо наступну множину:

$$S_{\delta_1\dots\delta_k} = \{z : \ z = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m c_m, \ \varepsilon_m = \delta_m, \ m = \overline{1,k}\}. \tag{7}$$

Циліндричні множини є замкненими (доводиться так само, як і замкненість $S$), крім того мають наступні властивості:

(1) $S = S_0 \cup S_1$;
(2) $S_{\delta_1\dots\delta_k} = S_{\delta_1\dots\delta_k 0} \cup S_{\delta_1\dots\delta_k 1}$;
(3) $S_{\delta_1\dots\delta_k} \supset S_{\delta_1\dots\delta_k\delta_{k+1}}$ $(k = 1, 2, \dots)$;
(4) циліндричні множини одного рангу є конгруентними;
(5) $d(S_{\delta_1\dots\delta_k}) \le \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} |c_m|$ ($d(A)$ – діаметр множини $A$);
(6) $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} S_{\delta_1\dots\delta_k} = \{z_{\delta_1\dots\delta_k\dots}\}$;
(7) циліндрична множина $S_{\sigma_1\dots\sigma_k}$ $(k \in \mathbb{N})$ є центрально симетричною множиною з центром симетрії в точці $z_0 = \sum\limits_{m=1}^{k} \sigma_m c_m + \frac{1}{2} \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} c_m$, і може бути покрита замкненим кругом радіуса $R = \frac{1}{2} \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} |c_m|$.

Властивості 1–3 безпосередньо випливають з означення циліндричних множин. Доведемо властивість 4. Розглянемо дві довільні циліндричні множини $k$-го рангу:

$$S_{\alpha_1\dots\alpha_k} = \{z : z = \sum_{m=1}^{k} \alpha_m c_m + \sum_{m=k+1}^{\infty} \varepsilon_m c_m, \ \varepsilon_m \in \{0; 1\}\},$$

$$S_{\beta_1\dots\beta_k} = \{z : z = \sum_{m=1}^{k} \beta_m c_m + \sum_{m=k+1}^{\infty} \delta_m c_m,\ \delta_m \in \{0;1\}\}.$$

Очевидно, що функція $f(z) = z + \sum\limits_{m=1}^{\infty} (\alpha_m - \beta_m) c_m$ взаємно однозначно відображає множину $S_{\beta_1\dots\beta_k}$ в $S_{\alpha_1\dots\alpha_k}$. Оскільки $f(z)$ задає паралельне перенесення площини, то множини $S_{\alpha_1\dots\alpha_k}$ та $S_{\beta_1\dots\beta_k}$ є конгруентними. Властивість 4 доведено. Доведемо тепер властивість 5. Нехай $z, z'$ – дві довільні точки циліндричної множини $S_{\delta_1\dots\delta_k}$, тоді існують послідовності $(\varepsilon_{k+1}, \varepsilon_{k+2}, \dots, \varepsilon_{k+n}, \dots) \in \{0;1\}^{\mathbb{N}}$ та $(\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \dots, \xi_{k+n}, \dots) \in \{0;1\}^{\mathbb{N}}$, такі, що $z = \sum\limits_{m=1}^{k} \delta_m c_m + \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} \varepsilon_m c_m$, $z' = \sum\limits_{m=1}^{k} \delta_m c_m + \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} \xi_m c_m$. Тоді

$$|z - z'| = |\sum_{m=k+1}^{\infty} (\varepsilon_m - \xi_m) c_m| \le \sum_{m=k+1}^{\infty} |\varepsilon_m - \xi_m||c_m| \le \sum_{m=k+1}^{\infty} |c_m|.$$

Оскільки це виконується для довільних $z, z' \in S_{\delta_1\dots\delta_k}$, то

$$d(S_{\delta_1\dots\delta_k}) = \sup_{z,z' \in S_{\delta_1\dots\delta_k}} \{|z - z'|\} \le \sum_{m=k+1}^{\infty} |c_m|.$$

Для доведення властивості 6 відмітимо, що $z_{\delta_1\dots\delta_k\dots} \in S_{\delta_1\dots\delta_k}$ для будь-якого натурального $k$, а значить $z_{\delta_1\dots\delta_k\dots} \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} S_{\delta_1\dots\delta_k}$. З іншого боку, непорожні замкнені множини $S_{\delta_1\dots\delta_k}$ є вкладеними (властивість 3.): $S_{\delta_1} \supset S_{\delta_1\delta_2} \supset \dots S_{\delta_1\delta_2\dots\delta_k} \supset \dots$, з діаметрами $d(S_{\delta_1\dots\delta_k}) \le \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} |c_m| \to 0 \ \ (k \to \infty)$, тому їх перетин складається з однієї точки. З попереднього зауваження випливає, що це точка $z_{\delta_1\dots\delta_k\dots}$. Тобто $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} S_{\delta_1\dots\delta_k} = \{z_{\delta_1\dots\delta_k\dots}\}$.

Доведемо тепер властивість 7. Нехай $S_{\sigma_1\dots\sigma_k}$ – довільна циліндрична множина $k$-го рангу, і $z$ – довільна точка на ній. Тоді існує послідовність $\{\tau_{k+1}, \dots, \tau_{k+j}, \dots\} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, така, що $z = \sum\limits_{m=1}^{k} \sigma_m c_m + \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} \tau_m c_m$. Покажемо, що точка $z' = 2z_0 - z$ також належить $S_{\sigma_1\dots\sigma_k}$. Дійсно, маємо рівність

$$z' = 2\sum_{m=1}^{k} \sigma_m c_m + \sum_{m=k+1}^{\infty} c_m - (\sum_{m=1}^{k} \sigma_m c_m + \sum_{m=k+1}^{\infty} \tau_m c_m) = \sum_{m=1}^{k} \sigma_m c_m + \sum_{m=k+1}^{\infty} (1 - \tau_m) c_m.$$

Звідси, враховуючи що $(1 - \tau_m) \in \{0,1\}$, та з означення множини $S_{\sigma_1\dots\sigma_k}$ випливає, що $z' \in S_{\sigma_1\dots\sigma_k}$. А це і означає, що дана множина є центрально симетричною, з центром симетрії $z_0 = \sum\limits_{m=1}^{k} \sigma_m c_m + \frac{1}{2} \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} c_m$. Очевидно, що замкнений круг з центром в точці $z_0$ та радіусом $r = \frac{1}{2} d(S_{\sigma_1\dots\sigma_k})$ буде мінімальним замкненим кругом, що містить множину $S_{\sigma_1\dots\sigma_k}$. Оскільки $d(S_{\sigma_1\dots\sigma_k}) \le \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} |c_m|$ (властивість 5), то множина $S_{\sigma_1\dots\sigma_k}$

тим більше буде міститись в замкненому крузі з центром в точці $z_0$ та радіусом $R = \frac{1}{2} \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} |c_m|$.

Ще одне твердження, пов'язане з циліндричними множинами, сформулюємо окремо у вигляді наступної леми.

**Лема** 1. *Якщо для всіх $k \in \mathbb{N}$ члени ряду* (1) *задовольняють нерівність*

$$|c_k| > \sum_{m=k+1}^{\infty} |c_m|, \tag{8}$$

*то циліндричні множини* (7) *одного рангу попарно не перетинаються.*

Доведення. Відмітимо, що з властивостей 1,2 циліндричних множин, випливає наступна рівність:

$$S = \bigcup_{(\delta_1,\ldots,\delta_k)} S_{\delta_1\ldots\delta_k}.$$

Покажемо, що якщо виконується нерівність (8), то множини $S_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$ та $S_{\beta_1\ldots\beta_k}$ не перетинаються при $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k) \neq (\beta_1,\ldots,\beta_k)$ (запис $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k) = (\beta_1,\ldots,\beta_k)$ означає, що $\alpha_m = \beta_m$, $m = \overline{1,k}$). Дійсно, якщо $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k) \neq (\beta_1,\ldots,\beta_k)$, то існує принаймні один номер $m \in \{1,\ldots,k\}$, такий що $\alpha_m \neq \beta_m$. Позначимо через $p$ найменший з таких номерів. Це означає, що $\alpha_p \neq \beta_p$ і $\alpha_m = \beta_m$ при $1 \leq m \leq p-1$. Тоді $S_{\alpha_1\ldots\alpha_k} \subset S_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$, $S_{\beta_1\ldots\beta_k} \subset S_{\beta_1\ldots\beta_p}$. Оскільки

$$d(S_{\alpha_1\ldots\alpha_p}) \leq \sum_{j=p+1}^{\infty} |c_j|,$$

то існує замкнений круг $\omega$ з радіусом

$$r = \frac{1}{2} \sum_{j=p+1}^{\infty} |c_j|,$$

такий що $S_{\alpha_1\ldots\alpha_p} \subset \omega$. Множина $S_{\beta_1\ldots\beta_p}$ одержується з $S_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ паралельним перенесенням на вектор $\sum\limits_{m=1}^{p} (\beta_m - \alpha_m)c_m$, при цьому круг $\omega$ переходить в круг $\omega'$, який містить множину $S_{\beta_1\ldots\beta_p}$. Відстань між центрами кругів $\omega$ та $\omega'$ дорівнює

$$d = |\sum_{m=1}^{p} (\beta_m - \alpha_m)c_m| = |c_p|,$$

радіуси кругів дорівнюють

$$r = \frac{1}{2} \sum_{j=p+1}^{\infty} |c_j|.$$

Якщо $\delta = d - 2r > 0$, то $\omega \cap \omega' = \varnothing$ а, значить, і $S_{\alpha_1\ldots\alpha_k} \cap S_{\beta_1\ldots\beta_k} = \varnothing$. Оскільки $\delta = |c_p| - \sum\limits_{j=p+1}^{\infty} |c_j|$, то при виконанні умови (8) матимемо $\delta > 0$, і, значить, $S_{\alpha_1\ldots\alpha_k} \cap S_{\beta_1\ldots\beta_k} = \varnothing$ при $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k) \neq (\beta_1,\ldots,\beta_k)$. З цього, зокрема, випливає, що при цій умові кожна точка $z \in S$ відповідає єдиній послідовності $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, \dots) \in \{0;1\}^{\mathbb{N}}$. Лему доведено. $\square$

**Теорема** 2. *Якщо для всіх натуральних $k$ виконується нерівність* (8) *то множина $S$ є цілком незв'язною.*

Доведення. Нагадаємо, що множина називається цілком незв'язною, якщо компонента кожної її точки складається з однієї цієї точки [**1**]. Нехай $z$ – довільна точка множини $S$. Позначимо $C_z$ компоненту точки $z$, тобто найбільшу зв'язну підмножину множини $S$, що містить точку $z$. Оскільки $z \in S$, то існує така послідовність $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, що $z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n c_n$. Тоді $z \in S_{\delta_1 \dots \delta_k}$ для кожного натурального $k$. Нехай $I^k := \{0,1\}^k$, $I^k_\delta := I^k \setminus \{(\delta_1, \dots, \delta_k)\}$. Для довільного $k \in \mathbb{N}$ виконується рівність $S = \bigcup\limits_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in I^k} S_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}$. Оскільки циліндричні множини одного рангу попарно не перетинаються, то $S \setminus S_{\delta_1 \dots \delta_k} = \bigcup\limits_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in I^k_\delta} S_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}$ і, значить, множина $S \setminus S_{\delta_1 \dots \delta_k}$ є замкненою, як об'єднання скінченного числа замкнених множин. Крім того $S_{\delta_1 \dots \delta_k} \bigcap (S \setminus S_{\delta_1 \dots \delta_k}) = \varnothing$ і $S_{\delta_1 \dots \delta_k} \bigcup (S \setminus S_{\delta_1 \dots \delta_k}) = S$. Таким чином, непорожня зв'язна множина $C_z$ міститься в об'єднанні замкнених диз'юнктних множин $S_{\delta_1 \dots \delta_k}$ і $S \setminus S_{\delta_1 \dots \delta_k}$. Як відомо [**1**], з цього випливає, що вона міститься лише в одній з цих множин. Враховуючи, що $z \in S_{\delta_1 \dots \delta_k} \bigcap C_z$ робимо висновок, що $C_z \subset S_{\delta_1 \dots \delta_k}$. Останнє включення має місце для довільного натурального $k$, тому $C_z \subset \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} S_{\delta_1 \dots \delta_k}$. За властивістю 6 циліндричних множин $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} S_{\delta_1 \dots \delta_k} = \{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta_k c_k\} = \{z\}$, тобто $C_z \subset \{z\}$. З іншого боку $\{z\} \subset C_z$, тому $C_z = \{z\}$, що і треба було довести. $\square$

**Теорема** 3. *Множина неповних сум абсолютно збіжного компексного ряду є континуальною, досконалою множиною.*

Доведення. Нехай $S$ – множина неповних сум ряду (1). Спочатку доведемо, що вона є континуальною. Розглянемо два випадки, в залежності від того, задовольняє ряд (1) нерівності (8), чи ні.

Розглянемо спочатку випадок, коли члени ряду (1) задовольняють нерівності (8). Покажемо, що в цьому випадку відображення $\sigma : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to S$ буде бієктивним. Оскільки в загальному випадку (незалежно від виконання нерівності (8)) $\sigma$ є сюр'єктивним відображенням, нам достатньо показати, що при виконанні нерівності (8) воно буде ін'єктивним. Розглянемо два довільних різних елемента $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, \dots)$ множини $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Нерівність $\alpha \neq \beta$ означає, що існує такий номер $p \in \mathbb{N}$ для якого $\alpha_p \neq \beta_p$. Тоді $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \neq (\beta_1, \dots, \beta_p)$ і, згідно леми 1, при виконанні нерівності (8) маємо $S_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \cap S_{\beta_1 \dots \beta_p} = \varnothing$. Оскільки $\sigma(\alpha) \in S_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$, $\sigma(\beta) \in S_{\beta_1 \dots \beta_p}$, то $\sigma(\alpha) \neq \sigma(\beta)$. Таким чином, при виконанні нерівності

(8) сюр'єктивне відображення $\sigma$ буде також і ін'єктивним, тобто буде бієкцією. Отже, в цьому випадку, множини $S$ і $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ є рівнопотужними. Як відомо, множина $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ є континуальною, тому континуальною буде і множина $S$.

Нехай тепер ряд (1) є довільним абсолютно збіжним рядом. В цьому випадку з послідовності $\{c_n\}$ можна виділити підпослідовність $\{c_{n_k}\}$ для членів якої буде виконуватись нерівність аналогічна нерівності (8), а саме:

$$|c_{n_k}| > \sum_{m=k+1}^{\infty} |c_{n_m}|. \tag{9}$$

Покажемо, як вибрати числа $n_k \in \mathbb{N}$, так, щоб відповідні їм члени ряду (1) задовольняли нерівність (9). В якості $n_1$ можна взяти довільне натуральне число. Оскільки ряд (1) є абсолютно збіжним, то $\lim\limits_{p\to\infty} \sum\limits_{n=p+1}^{\infty} |c_n| = 0$. Крім того, $|c_n| > 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, тому існує $t \in \mathbb{N}$, таке, що

$$|c_{n_1}| > \sum_{j=t}^{\infty} |c_j|. \tag{10}$$

Тоді покладемо $n_2 = \min\{t \in \mathbb{N}: \ \ |c_{n_1}| > \sum\limits_{j=t}^{\infty} |c_j|\}$. Аналогічно визначаються $n_3,\ n_4$ і т.д. Взагалі, якщо визначено $n_k$, то $n_{k+1}$ визначається рівністю

$$n_{k+1} = \min\{t \in \mathbb{N}: \ \ |c_{n_k}| > \sum_{j=t}^{\infty} |c_j|\}.$$

Продовжуючи цей процес необмежено, побудуємо послідовність натуральних чисел $\{n_k\}$. Відповідна їй підпослідовність $\{c_{n_k}\}$ послідовності $\{c_n\}$ членів ряду (1), задовольняє нерівність (9). Дійсно, легко помітити, що $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \ldots$, тому, враховуючи означення чисел $n_k$, матимемо нерівність

$$\sum_{m=k+1}^{\infty} |c_{n_m}| < \sum_{j=n_{k+1}}^{\infty} |c_j| < |c_{n_k}|.$$

Позначимо через $S'$ множину неповних сум ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{n_k}$. Оскільки члени цього ряду задовольняють нерівність (9), то $S'$ має потужність континууму. Зрозуміло, що $S' \subset S$, тому потужність $S$ не менше ніж потужність континууму. З іншого боку, множина $S$ є образом континуальної множини $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ при сюр'єктивному відображенні $\sigma$, яке задається відповідністю (3), тому її потужність не перевищує потужність континууму. Таким чином, $S$ є континуальною множиною.

Доведемо тепер, що $S$ є досконалою множиною. Оскільки вона є замкненою, нам залишилось показати, що вона не містить ізольованих точок. Нехай $w$ – довільна точка множини $S$. Покажемо, що для довільного $\varepsilon > 0$ в $\varepsilon$-околі $U_\varepsilon(w) = \{z \in$

$\mathbb{C}: \ |z-w|<\varepsilon\}$ точки $w$ міститься принаймні одна точка $w' \in S$ відмінна від $w$. Оскільки $w \in S$, то існує послідовність $\{\delta_k\} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, така, що $w = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta_k c_k$. Тоді $w \in S_{\delta_1 \ldots \delta_k}$ для довільного натурального $k$. Згідно властивості 5 циліндричних множин для діаметрів множин $S_{\delta_1 \ldots \delta_k}$ виконується нерівність $d(S_{\delta_1 \ldots \delta_k}) \leq \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} |c_m|$. Оскільки ряд (1) є абсолютно збіжним, то для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке натуральне число $N$, що $\sum\limits_{m=N+1}^{\infty} |c_m| < \varepsilon$. Тоді $d(S_{\delta_1 \ldots \delta_N}) < \varepsilon$, звідки, враховуючи, що $w \in S_{\delta_1 \ldots \delta_N}$, випливає включення $S_{\delta_1 \ldots \delta_N} \subset U_\varepsilon(w)$. Оскільки циліндрична множина $S_{\delta_1 \ldots \delta_N}$ є континуальною (доводиться так само, як континуальність множини $S$), то існує точка $w' \in S$, така, що $w' \neq w$ і $w' \in U_\varepsilon(w)$. Теорему доведено. $\square$

Досліджувати властивості множини $S$ користуючись безпосередньо її представленням (2) не дуже зручно. Тому нижче ми розглянемо ще один спосіб подання множини $S$, а саме – як границі деякої спадної послідовності компактних множин.

Позначимо $H_{\delta_1 \ldots \delta_k} = \mathrm{conv} S_{\delta_1 \ldots \delta_k}$. Для множин $H_{\delta_1 \ldots \delta_k}$ ( $(\delta_1, \ldots, \delta_k) \in \{0;1\}^k, \ k \in \mathbb{N}$) виконуються наступні властивості:

(1) $H_{\delta_1 \ldots \delta_k}$ – компактна множина;
(2) $H_{\delta_1 \ldots \delta_k \delta_{k+1}} \subset H_{\delta_1 \ldots \delta_k}$;
(3) $d(H_{\delta_1 \ldots \delta_k}) = d(S_{\delta_1 \ldots \delta_k})$.
(4) $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} H_{\delta_1 \ldots \delta_k} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} S_{\delta_1 \ldots \delta_k} = \{z_{\delta_1 \ldots \delta_k \ldots}\}$;

Перші дві властивості безпосередньо випливають з властивостей опуклої оболонки та властивостей циліндричних множин $S_{\delta_1 \ldots \delta_k}$. Доведемо третю властивість. Введемо для зручності позначення: $A := S_{\delta_1 \ldots \delta_k}$. Враховуючи включення $A \subset \mathrm{conv} A$ та означення діаметра множини, маємо:

$$d(A) = \sup_{t,u \in A} \{|u-t|\} \leq \sup_{v,w \in \mathrm{conv} A} \{|w-v|\} = d(\mathrm{conv} A).$$

Отже, виконується нерівність

$$d(A) \leq d(\mathrm{conv} A). \tag{11}$$

Далі, оскільки $\mathrm{conv} A$ компактна, то існують точки $z_1, z_2 \in \mathrm{conv} A$, такі що $d(\mathrm{conv} A) = |z_1 - z_2|$. Покажемо, що $z_1, z_2 \in A$. Дійсно, припустимо, що принаймні одна з цих точок, наприклад $z_1$, не належить $A$. Як відомо ([**3**]), опукла оболонка множини $A$ $n$-вимірного афінного простору є об'єднанням всіх $m$-симплексів в цьому просторі ($m \leq n$) з вершинами в $A$. В нашому випадку $m = 0, 1, 2$. Якщо $z_1$ належить 0-симплексу з вершинами в $A$, то, очевидно, що в цьому випадку $z_1$ є точкою множини $A$. Нехай тепер $z_1$ належить 1-симплексу з вершинами в $A$, тобто деякому відрізку

$[ab]$ з кінцями в точках $a, b \in A$. Припустимо, що $z_1$ є внутрішньою точкою $[ab]$. В трикутнику з вершинами $a, b, z_2$ відрізок $[z_1 z_2]$ з'єднує вершину $z_2$ з внутрішньою точкою протилежної сторони, тому $|z_1 - z_2| < \max\{|a - z_2|, |b - z_2|\}$. А це, враховуючи, що $z_2 \in \mathrm{conv}A$, $a, b \in A \subset \mathrm{conv}A$, суперечить тому, що $|z_1 - z_2| = d(\mathrm{conv}A) = \sup\limits_{u,v \in \mathrm{conv}A} \{|u - v|\}$. Отже, $z_1$ є однією з вершин відрізка $[ab]$ і, значить, належить множині $A$. Нарешті, рзглянемо випадок коли $z_1$ належить деякому 2-симплексу з вершинами в $A$, тобто деякому трикутнику $\Delta$ з вершинами в точках $p, q, r \in A$. Очевидно, що $z_1$ не може належати внутрішності трикутника $\Delta$, оскільки при цьому виконувалась би нерівність, яка суперечить вибору точок $z_1$ та $z_2$: $|z_1 - z_2| < \max\{|z_2 - d|, |z_2 - e|\} \leq d(\mathrm{conv}A)$, де $d, e \in \mathrm{conv}A$ – точки перетину сторін трикутника $\Delta$ з прямою, яка проходить через точки $z_1, z_2$. Отже, точка $z_1$ повинна лежати на одній зі сторін трикутника $\Delta$. Таким чином, ми прийшли до випадку 1-симплекса, що був розглянутий вище, і, значить, як було показано, $z_1$ не може бути внутрішньою точкою сторони і співпадає з однією з вершин трикутника. Це означає, що точка $z_1$ належить множині $A$. Аналогічно можна показати, що і $z_2 \in A$. Таким чином, $z_1, z_2 \in A$, звідки маємо:

$$d(\mathrm{conv}A) = |z_1 - z_2| \leq \sup_{s,t \in A} \{|t - s|\} = d(A). \tag{12}$$

З нерівностей (11), (12) випливає, що $d(\mathrm{conv}A) = d(A)$, тобто $d(H_{\delta_1 \ldots \delta_k}) = d(S_{\delta_1 \ldots \delta_k})$. Що і треба було довести.

Для доведення четвертої властивості відмітимо, що множини $H_{\delta_1 \ldots \delta_k}$ $(k \in \mathbb{N})$ утворюють спадну послідовність непорожніх замкнених множин з діаметрами $d(H_{\delta_1 \ldots \delta_k}) = d(S_{\delta_1 \ldots \delta_k}) \leq \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} |c_m| \to 0 \quad (k \to \infty)$, тому їх перетин $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} H_{\delta_1 \ldots \delta_k}$ містить, і притому єдину точку. Оскільки $H_{\delta_1 \ldots \delta_k} \supset S_{\delta_1 \ldots \delta_k}$, то $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} H_{\delta_1 \ldots \delta_k} \supset \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} S_{\delta_1 \ldots \delta_k} = \{z_{\delta_1 \ldots \delta_k \ldots}\}$ і, значить, даною точкою є $z_{\delta_1 \ldots \delta_k \ldots}$.

Далі нам знадобиться метрика Хаусдорфа. Нагадаємо її означення та основні властивості ([**3**], [**5**], [**8**]).

### Метрика Хаусдорфа

Нехай $(M, \rho)$ – метричний простір. Відстань між точкою $b \in M$ і множиною $A \subset M$, як зазвичай, визначається формулою $\rho(b, A) = \inf\limits_{a \in A} \rho(a, b)$, а "відстань"між двома множинами $A, B \subset M$ визначається формулою

$$\rho(A, B) = \inf_{a \in A} \rho(a, B) = \inf_{b \in B} \rho(b, A).$$

Визначена таким чином "відстань"між множинами не є метрикою, оскільки $\rho(A, B) = 0$, якщо $A$ і $B$ мають спільну точку або спільну граничну точку.

Хаусдорф в [**5**] дав інше означення відстані між множинами даного метричного простору. Нехай $A \subset M$. Позначимо через $U(\varepsilon, x)$ множину всіх точок $x \in M$, що задовольняють умову $\rho(x, A) \leq \varepsilon$, де $\varepsilon \geq 0$, тобто

$$U(\varepsilon, A) = \{x : x \in M,\ \rho(x, A) \leq \varepsilon\}.$$

Нижня грань $h(A, B)$ чисел $\varepsilon$ таких, що $U(\varepsilon, A) \supset B$ і $U(\varepsilon, B) \supset A$, називається *хаусдорфовою відстанню* або *відстанню в сенсі відхилення множин* між множинами $A$ і $B$, що індукована відстанню $\rho$. Якщо простір $M$ повний і $2^M$ – множина всіх компактних підмножин $M$, то хаусдорфова відстань між підмножинами є метрикою в $2^M$.

Властивості метрики Хаусдорфа

(1) $h(\bigcup\limits_{i\in I} A_i, \bigcup\limits_{i\in I} B_i) \leq \sup\limits_{i\in I} h(A_i, B_i)$,
(2) якщо $A \subset B$, то $h(A, B) \leq d(B)$, де $d(B)$ – діаметр множини $B$,
(3) якщо $X \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i$, то $h(X, \bigcup\limits_{i\in I} A_i) \leq \sup\limits_{i\in I} d(A_i)$.

**Лема** 2. *Множина $S$ може бути подана наступним чином:*

$$S = \lim_{k\to\infty} \bigcup_{(\gamma_1,\dots,\gamma_k)} \operatorname{conv} S_{\gamma_1\dots\gamma_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{(\gamma_1,\dots,\gamma_k)} \operatorname{conv} S_{\gamma_1\dots\gamma_k}, \tag{13}$$

*де* conv $S_{\gamma_1\dots\gamma_k}$ *– опукла оболонка множини $S_{\gamma_1\dots\gamma_k}$, а об'єднання розглядається за всіма можливими наборами $(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$.*

Доведення. Позначимо $H^k := \bigcup\limits_{(\gamma_1,\dots,\gamma_k)} H_{\gamma_1\dots\gamma_k}$. З властивості 2 множин $H_{\gamma_1\dots\gamma_k}$ випливає, що $H^{k+1} \subset H^k$, тобто маємо спадну послідовність множин: $H^1 \supset H^2 \supset \dots \supset H^k \supset \dots$ і, значить, існує $\lim\limits_{k\to\infty} H^k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} H^k$. Множини $H^k$ є компактними, як об'єднання скінченного числа компактних множин. Тому компактною множиною буде і границя $\lim\limits_{k\to\infty} H^k$. Покажемо, що вона співпадає з множиною $S$.

Оскільки множини $S$ та $H^k$ компактні, то $\lim\limits_{k\to\infty} H^k = S$, якщо $\lim\limits_{k\to\infty} h(S, H^k) = 0$, де $h$ – метрика Хаусдорфа. Маємо

$$h(S, H^k) = h(\bigcup_{(\gamma_1,\dots,\gamma_k)} S_{\gamma_1\dots\gamma_k}, \bigcup_{(\gamma_1,\dots,\gamma_k)} H_{\gamma_1\dots\gamma_k}) \leq \sup_{(\gamma_1,\dots,\gamma_k)} h(S_{\gamma_1\dots\gamma_k}, H_{\gamma_1\dots,\gamma_k}) \leq$$

$$\leq \sup_{(\gamma_1,\dots,\gamma_k)} d(H_{\gamma_1\dots\gamma_k}) \leq \sum_{m=k+1}^{\infty} |c_m| \to 0 \ \ (k \to \infty).$$

Лему доведено. □

**Теорема** 4. *Нехай $\lambda(\cdot)$ – двовимірна міра Лебега. Тоді*

$$\lambda(S) \leq \lim_{k\to\infty} 2^k \lambda(H_{\gamma_1\dots\gamma_k}), \tag{14}$$

*де* $(\gamma_1, \dots, \gamma_k) \in \{0;1\}^k$ *– довільний фіксований набір.*

*Якщо ж виконується умова* (8)*, то має місце рівність*

$$\lambda(S) = \lim_{k\to\infty} 2^k \lambda(H_{\gamma_1\dots\gamma_k}). \tag{15}$$

Доведення. Враховуючи неперервність міри Лебега, твердження леми 2, конгруентність множин $S_{\gamma_1\dots\gamma_k}$ ( а, значить, і $H_{\gamma_1\dots\gamma_k}$) при фіксованому $k$, а також вимірність множин $H_{\gamma_1\dots\gamma_k}$ (як опуклих множин), маємо

$$\lambda(S) = \lambda(\lim_{k\to\infty} H^k) = \lim_{k\to\infty} \lambda(H^k) = \lim_{k\to\infty} \lambda(\bigcup_{(\gamma_1,\dots,\gamma_k)} H_{\gamma_1\dots\gamma_k}) \le \lim_{k\to\infty} \sum_{(\gamma_1,\dots,\gamma_k)} \lambda(H_{\gamma_1\dots\gamma_k}) = \tag{16}$$

$$= \lim_{k\to\infty} 2^k \lambda(H_{\gamma_1\dots\gamma_k}).$$

Оскільки $H_{\gamma_1\dots\gamma_k} \subset C_{\gamma_1\dots\gamma_k}$, де $C_{\gamma_1\dots\gamma_k}$ – замкнений круг, що містить циліндричну множину $S_{\gamma_1\dots\gamma_k}$, то при виконанні нерівності (8) матимемо: $H_{\alpha_1\dots\alpha_k} \cap H_{\beta_1\dots\beta_k} = \varnothing$, якщо $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \ne (\beta_1, \dots, \beta_k)$. Тоді отримаємо в (16) рівність

$$\lim_{k\to\infty} \lambda(\bigcup_{(\gamma_1,\dots,\gamma_k)} H_{\gamma_1\dots\gamma_k}) = \lim_{k\to\infty} \sum_{(\gamma_1,\dots,\gamma_k)} \lambda(H_{\gamma_1\dots\gamma_k}) \tag{17}$$

Таким чином, при виконанні нерівності (8), отримаємо рівність (15). Теорему доведено. □

Наслідок 1. *Якщо*

$$\lim_{k\to\infty} 2^k (\sum_{m=k+1}^{\infty} |c_m|)^2 = 0, \tag{18}$$

*то* $\lambda(S) = 0$.

Дійсно, оскільки $H_{\gamma_1\dots\gamma_k} \subset C_{\gamma_1\dots\gamma_k}$, то враховуючи монотонність міри Лебега, маємо: $\lambda(H_{\gamma_1\dots\gamma_k}) \le \lambda(C_{\gamma_1\dots\gamma_k}) = \frac{\pi}{4}(\sum\limits_{m=k+1}^{\infty} |c_m|)^2$. Тоді, якшо виконується рівність (18), маємо

$$0 \le \lambda(S) \le \lim_{k\to\infty} 2^k \lambda(H_{\gamma_1\dots\gamma_k}) \le \frac{\pi}{4} \lim_{k\to\infty} 2^k (\sum_{m=k+1}^{\infty} |c_m|)^2 = 0,$$

звідки $\lambda(S) = 0$.

Далі під записом $A+B$, де $A, B \subset \mathbb{C}$, будемо розуміти арифметичну суму множин $A$ та $B$, тобто: $A+B = \{z : z = u+v,\ u \in A,\ v \in B\}$. Наприклад, арифметична сума двох відрізків є або паралелограмом зі сторонами паралельними даним відрізкам, якщо вони не паралельні, або відрізком паралельним їм у протилежному випадку.

Скористаємось показниковою формою запису членів ряду (1): $c_k = r_k e^{i\varphi_k}$ $(k = 1, 2, \dots)$. Позначимо $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \dots\}$. Розглянемо випадок, коли множина $\Phi$ скінченна, тобто $\Phi = \{\psi_1, \dots, \psi_M\}$. Розглянемо наступні множини:

$$I_j = \{m \in \mathbb{N} : \varphi_m = \psi_j\}, \quad j = 1, \dots, M.$$

Зрозуміло, що $I_1 \cup \cdots \cup I_M = \mathbb{N}$, і серед множин $I_j$ принаймні одна є нескінченною. Оскільки в абсолютно збіжному ряду можна довільним чином переставляти та групувати члени, то для довільної точки $z = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k c_k$ множини $S$, маємо

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k c_k = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k r_k e^{i\varphi_k} = e^{i\psi_1} \sum_{k \in I_1} \varepsilon_k r_k + \cdots + e^{i\psi_M} \sum_{k \in I_M} \varepsilon_k r_k.$$

Тоді для множини $S$ маємо наступний розклад в арифметичну суму множин

$$S = S_1 + \cdots + S_M, \tag{19}$$

де $S_j = \{z : z = e^{i\psi_j} \sum\limits_{k \in I_j} \varepsilon_k r_k\},\ j = 1, \ldots, M$.

**Теорема** 5. *Якщо серед множин $I_j$ $(j = 1, \ldots, M)$ існує принаймні дві нескінченні множини:*

$$I_p = \{n_{p,1}, n_{p,2} \ldots, n_{p,k}, \ldots\},$$
$$I_q = \{n_{q,1}, n_{q,2} \ldots, n_{q,k}, \ldots\},\ (p, q \in \{1, \ldots, M\}),$$

*такі, що для всіх $k \in \mathbb{N}$ виконується нерівність*

$$r_{n_{j,k}} \le \sum_{m=k+1}^{\infty} r_{n_{j,m}}, \quad j \in \{p, q\}, \tag{20}$$

*і $|\psi_p - \psi_q| \ne \pi$, то множина $S$ містить внутрішні точки (і, значить, має додатну міру Лебега).*

Доведення. Множина

$$S_j = \{z : z = e^{i\psi_j} \sum_{k \in I_j} \varepsilon_k r_k\} = \{z : z = e^{i\psi_j} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{n_{j,k}} r_{n_{j,k}}\}\ (j \in \{p, q\})$$

одержується з множини

$$S_j^* = \{x \in \mathbb{R} : x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{n_{j,k}} r_{n_{j,k}}\},$$

розташованої на дійсній вісі, поворотом на кут $\psi_j$ $(j \in \{p, q\})$. Множина $S_j^*$ є множиною неповних сум збіжного додатного ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} r_{n_{j,k}}$, дослідження її властивостей можна знайти в монографії [**4**], де вона розглядалась, як спектр розподілу одного класу випадкових величин (нескінченних згорток Бернулі). Як було показано в [**4**], якщо виконується нерівність (20), то множина $S_j^*$ є відрізком. А, значить, відрізком є і $S_j$ $(j \in \{p, q\})$. Якщо $|\psi_p - \psi_q| \ne \pi$, то відрізки $S_p$ і $S_q$ не є паралельними, тому їх арифметична сума $S_p + S_q$ є паралелограмом. Перепишемо рівність (19) в наступному вигляді:

$$S = \sum_{k \in J} S_k + (S_p + S_q),\ J = \{1, \ldots, M\} \setminus \{p, q\}.$$

Позначимо $V = \sum\limits_{k\in J} S_k$, тоді з означення арифметичної суми випливає рівність

$$S = \bigcup_{v\in V} (v + (S_p + S_q)).$$

Тобто $S$ є об'єднанням паралелограмів, які одержуються з $S_p + S_q$ паралельним перенесенням на вектори $v \in V$. Оскільки $S_p + S_q$ має внутрішні точки, то їх буде мати і множина $S$. Теорему доведено.

## Література


[1] *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука, 1977. – 368 с.

[2] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972. – 496 с.

[3] *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества: Пер. с нем.– М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 336 с.

[4] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів /Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, Київ – 1998. – 296 с.

[5] *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. – М.:ОНТИ, 1937. – 305 с.

[6] Функциональный анализ // Под общей редакцией *С.Г. Крейна.* – М., 1972. – 544 с.

[7] *Bandt C.* On the Mandelbrot set for pairs of linear maps, Nonlinearity 15 (2002),1127-1147.

[8] *Hutchinson J.E.*(1981) Fractals and self-similarity, Indiana Univ. Math. J., 30, 713-747.

[9] *Solomyak B.* On the "Mandelbrot set"for pairs of linear maps: asymptotic self-similarity, Nonlinearity 18 (2005), no. 5, 1927-1943.

[10] *Solomyak B. and Xu H.* On the "Mandelbrot set"for a pair of linear maps and complex Bernoulli convolutions, Preprint, 2002.