Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2009, № 10.— С. 64–72.

Фрактальна модель ціноутворення фінансових активів

Я. В. Гончаренко, Л. М. Чабак
(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова,
Київська державна академія водного транспорту)

Анотація. В статті вивчаються властивості функції, заданої перетворювачем цифр зображення аргумента в цифри зображення функції, яка є математичною моделлю руху цін на цінні папери, досліджуються її фрактальні властивості.

Abstract. In the paper we study properties of the function defined by transducer from digits of representation of argument to digits of representation of value of function. This function is a mathematical model of security price development. Fractal properties of this function are studied in detail.

1. Вступ

Ринкова ціна товару в широкому смислі (включаючи цінні папери, валюту тощо) змінюється з часом, і ці зміни, як правило, містять випадкові складові. Перша стохастична модель зміни ринкових цін була запропонована в дисертації Л.Башельє [L. Bachelier "Theorie de la speculation", 1900], в якій модель ціни як функції часу була визначена як випадковий процес, пізніше названий вінерівським. Подальші дослідження статистики функціонування фондових ринків привели до уточнення цієї моделі: замість значення ціни C_t в момент часу t, $t \in N$, доцільно моделювати логарифми цін $\log C_t$, моделлю яких є вінерівський процес. При цьому приріст ціни $\Delta C_{t+1} = C_{t+1} - C_t$ (або її логарифму) прийнято вважати випадковою величиною, яка не залежить від значення C_t та всіх попередніх значень C_τ, $\tau < t$ [**13**].

Властивість незалежності приростів логарифмів ринкових цін, спираючись на реальні дані, грунтовно дослідив М.Кендалл. В своїй доповіді на засіданні Королівського статистичного товариства Великобританії в 1953 р. він описав статистичні властивості великого обсягу досліджених ним даних. Намагаючись знайти ритми, тренди та цикли в цих цінах, він прийшов до висновку, що "Демон Випадку генерував випадковим чином число ... і додавав його до поточного значення для визначення ... ціни в наступний момент". Багато сучасних дослідників вважає, що "рівень апроксимації "броунівської" моделі не виправдовує покладених на неї сподівань" [**4**].

На сьогодні існує багато теорій, які намагаються адекватно змоделювати функціонування фінансового ринку. Однією з "класичних" є теорія відомого американського фінансиста Чарльза Доу [**5**]. Її суть полягає в наступному: Доу вважав, що ціни на акції зазнають циклічних коливань — після тривалого росту наступає тривале падіння, потім цей процес знову повторюється. Таким чином, Чарльз Доу дійшов висновку, що поводження ціни на акції можна прогнозувати, якщо відомо напрямок її зміни за якийсь останній період.

Наприкінці 60-х років на стику математики, фізики, інформатики, лінгвістики і біології з'явилась нова математична теорія, яка дозволяє строго аналітично описувати і вивчати властивості процесів і явищ, що мають складну, навіть хаотичну структуру, тобто теорія фракталів. Вона відразу привернула увагу фахівців з багатьох галузей науки, насамперед природничих, завдяки можливості широкого практичного використання. Як показали дослідження, геометрія фракталів має місце не тільки в живій природі, але й у суспільних процесах. Першим запропонував використовувати теорію фракталів для побудови моделі поводження цін на акції інший відомий американський фінансист Ральф Елліот, який запропонував так звану "хвильову теорію" [**5**]. Основою теорії служить так звана "хвильова діаграма", де хвиля — це помітний ціновий рух. При цьому рух цін розбивається на п'ять хвиль в напрямку більш сильного тренду, і на три хвилі — в протилежному напрямку. Наприклад, у випадку зростаючого тренду, розглядається п'ять хвиль при русі ціни вгору і три — при русі (корекції) вниз.

Елліот помітив, що кожна з цих хвиль в свою чергу є хвильовою діаграмою, яка теж розкладається на складові більш дрібні хвилі, і цей процес можна продовжити до будь-якого бажаного кроку, в результаті отримуються передфрактальні криві. Знання структури хвильової діаграми у більш дрібному масштабі важливе тому, що учасники фінансового ринку, знаючи, у якій частині діаграми вони знаходяться, можуть впевнено продавати цінні папери, коли починається коректива хвиля, і повинні купувати їх, коли починається імпульсна хвиля. Виходячи з результатів статистичних досліджень, Елліот запропонував використовувати числову послідовність Фібоначчі для упорядкування прогнозів у рамках технічного аналізу. Він вважав, що відношення довжин коректиних та імпульсних хвиль є коефіцієнтами Фібоначчі, тобто частками від ділення двох сусідніх членів послідовності Фібоначчі.

На сьогодні теорія Елліота широко використовується в фінансовому аналізі, створюються її модифікації та аналоги. Багато досліджень присвячено методам обчислення та прогнозування довжин зростаючих та коректиних хвиль.

В даній роботі, використовуючі методи фрактального аналізу об'єктів зі складною локальною будовою, розроблені в роботах Працьовитого М.В. [**3, 7, 4**], ми побудуємо і дослідимо властивості математичної моделі хвильової діаграми Елліота.

2. Математична модель хвильової діаграми Елліота руху цін

Розглянемо графік хвильової діаграми в системі координат, яку виберемо таким чином, щоб початок координат співпадав з точкою O, а абсциса точки A_1 дорівнювала 1.

Мал.2.

Точки A_{00}, A_{01}, A_{02}, A_{03}, A_{04}, A_{15}, A_{16}, A_{17} назовемо вершинами першого порядку. Спроектуємо вершини першого порядку на вісь (мал. 2). Отримаємо вісім відрізків, які позначимо Δ_i, $i = 0, 1, ..., 8$ і назвемо відрізками першого рангу. Їх довжини визначаються на основі статистичних даних і задовольняють співвідношення:

1. $\sum\limits_{i=0}^{7} |\Delta_i| = 1$;

2. $\dfrac{|\Delta_5| + |\Delta_6| + |\Delta_7|}{|\Delta_0| + |\Delta_1| + |\Delta_2| + |\Delta_3| + |\Delta_4|} = q$, де q — деяка стала, зокрема часто використовується значення $q = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

На наступному кроці кожну зростаючу хвилю розіб'ємо на п'ять хвиль, а кожну спадну на три. Спроектувавши вершини діаграми на вісь абсцис отримаємо відрізки другого рангу Δ_{ij}, причому

$$|\Delta_{ij}| = \begin{cases} \frac{|\Delta_i| \cdot |\Delta_j|(1+q)}{q}, & \text{при} \quad i = 2k, \\ |\Delta_i| \cdot |\Delta_j|(1+q), & \text{при} \quad i = 2k-1, \ \ k = 0, 1, ...4. \end{cases}$$

Продовжимо описану процедуру, розбиваючи кожен з відрізків з парною останньою цифрою номера на 5 відрізків, а з непарною цифрою — на три вірізки наступного рангу в тих же співвідношеннях, що і на попередньому кроці.

Розглянемо матрицю

$$Q = \begin{pmatrix} q_{10} & q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} & q_{15} & q_{16} & q_{17} \\ q_{20} & q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{35} & q_{36} & q_{37} \end{pmatrix},$$

$$q_{1i} = |\Delta_i|, \quad i = 0, 1, ..., 7; \quad q_{2j} = \frac{|\Delta_j|(1+q)}{q}, \quad j = 0, 1, 2, 3, 4;$$

$$q_{3k} = |\Delta_k|(1+q), \quad k = 5, 6, 7; \quad \sum_{j=0}^{7} q_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, 3.$$

Лема 1. *Будь-яке число $x \in [0; 1]$ можна представити у вигляді:*

$$x = a_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} a_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} q_{m\alpha_i}, \tag{1}$$

$$\text{\textit{де}} \quad a_{\alpha_1} = \sum_{k=0}^{\alpha_1 - 1} q_{1k}, \quad a_{\alpha_k} = \sum_{i=0}^{\alpha_k - 1} q_{mi}, \quad m = \begin{cases} 2, & \alpha_k = 2n; \\ 3, & \alpha_k = 2n-1. \end{cases}$$

Доведення. Розіб'ємо відрізок $[0; 1]$ на вісім відрізків першого рангу Δ_i, $i = 0, 1, ...8$, довжини яких визначаються елементами першого рядочка матриці Q. Кожен відрізок першого рангу з парним номером розіб'ємо на п'ять відрізків, довжини яких визначаються елементами другого рядочка матриці Q, а кожен відрізок з непарним номером — на три відрізки, довжини яких визначаються елементами третього рядочка матриці.

Продовживши цей процес, на k-му кроці отримаємо відрізки $\Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$, довжини яких дорівнюють

$$|\Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}| = \prod_{i=1}^{k} q_{m\alpha_i}, \qquad \text{де} \quad m = \begin{cases} 2, & \alpha_k = 2n; \\ 3, & \alpha_k = 2n-1. \end{cases}$$

Очевидно, що:

1) $|\Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}| \to 0$ при $k \to \infty$;

2) $\Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \alpha_{k+1}} \subset \Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$.

Отже, маємо систему вкладених відрізків, і за аксіомою Кантора можемо зробити висновок, що існує єдина точка x, яка належить нескінченній послідовності відрізків $\{\Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \ldots}\}$.

Нехай точка $x = \Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \ldots}$. Тоді існує α_1 відрізків першого рангу, α_2 відрізків другого рангу (для зростаючої хвилі) і $\alpha_2 - 5$ відрізків другого рангу (для корективної хвилі), $\ldots$, α_k відрізків k-го рангу (для імпульсної хвилі) і $\alpha_k - 5$ відрізків (для корективної хвилі), які лежать лівіше точки x і мають сумарну довжину $a_{\alpha_1} + a_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k} q_{m\alpha_i}$. Тобто для будь-якої точки x з $[0;1]$ мають місце формули (6). $\square$

Зауваження 1. *Формули* (6) *задають аналог Q^*-представлення дійсних чисел відрізка* $[0;1]$, *введеного в роботах Працьовитого М.В.* [**3, 7**].

Очевидно, що для деяких x існує по два представлення у формі (6). Це точки $x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(4)} = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots(\alpha_k+1)(5)}$, $\alpha_k \in \{0;2;4;6\}$ або $x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(7)} = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots(\alpha_k+1)(0)}$, $\alpha_k \in \{1;3;5\}$. Числа, які мають два представлення, будемо називати Q-раціональними. Домовимося використовувати тільки представлення раціональних чисел з періодом (5) і (0) відповідно.

Розглянемо функцію

$$y = f(x) = f(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} q_{m\alpha_i}, \tag{2}$$

$$\text{де} \quad b_{\alpha_1} = \sum_{k=0}^{\alpha_1 - 1} (-1)^k q_{1k}, \;\; b_{\alpha_k} = \sum_{i=0}^{\alpha_k - 1} (-1)^i q_{mi}, \;\; m = \begin{cases} 2, & \text{якщо } \alpha_k = 2n; \\ 3, & \text{якщо } \alpha_k = 2n-1. \end{cases}$$

Дамо геометричну інтерпретацію побудови значення функції $y = f(x)$ за даним значенням аргумента x, представленого у формі (6).

Розіб'ємо відрізок $[0;c]$ на вісім відрізків Δ_i^y, $i \in \overline{0,\ 7}$, причому відрізки з парними номерами будемо відкладати в додатному напрямі, а з непарними — у від'ємному. Довжини відрізків визначатимемо так: $|\Delta_i^y| = cq_{1i}$. Враховуючи те, що кожна корективна хвиля має меншу довжину, ніж попередня імпульсна, тобто $q_{i+1} < q_i$, $i \in \overline{0,7}$, отримаємо $\Delta_{2k+1}^y \subset \Delta_{2k}^y$, $k \in \overline{0,3}$.

Очевидно, що $f(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) \subset \Delta_{\alpha_1}^y$.

Кожен відрізок з парним номером розіб'ємо на п'ять відрізків, довжини яких визначаються $\left|\Delta_{ij}^y\right| = cq_{2j}$ $i \in \{0;2;4;6\}$. Кожен відрізок з непарним номером розіб'ємо на три відрізки, довжини яких визначаються $\left|\Delta_{ij}^y\right| = cq_{3j}$, $i \in \{1;3;5;7\}$. Продовживши цей процес, на k-му кроці отримаємо відрізки $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k}^y$, довжини яких $\left|\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k}^y\right| = \prod\limits_{i=1}^{k} q_{m\alpha_i}$, де $m = \begin{cases} 2, & \text{якщо } \alpha_k = 2n; \\ 3, & \text{якщо } \alpha_k = 2n-1. \end{cases}$

Очевидно, що $f(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) \subset \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k}^y$ і при $k \to \infty$, $\left|\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k}^y\right| \to 0$; $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k}^y \supset \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k\alpha_{k+1}}^y$.

Отже, ми побудували систему вкладених відрізків, і за аксіомою Кантора можемо зробити висновок, що існує єдина точка, яка належить нескінченній послідовності відрізків $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots}^y$, а саме: $y = f(x) = f(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots})$.

Зауваження 2. *Абсциси вершин хвильової діаграми є Q-раціональними точками відрізка $[0;\ 1]$, а ординати її вершин — це значення функції $y = f(x)$ в цих точках. Зрозуміло, що сама хвильова діаграма (крива Γ) є замиканням множини своїх вершин.*

З леми 1, означення функції $y = f(x)$ (2) та попереднього зауваження випливають наступні твердження.

Теорема 1. *Координати вершин хвильової діаграми n-го порядку обчислюються за формулами:*

$$x = a_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{n} a_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} q_{m\alpha_i}, \quad \text{де} \quad a_{\alpha_1} = \sum_{k=0}^{\alpha_1 - 1} q_{1k}, a_{\alpha_k} = \sum_{i=0}^{\alpha_k - 1} q_{mi},$$

$$y = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{n} b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} q_{\alpha_{mi}}, \quad \text{де} \quad b_{\alpha_1} = \sum_{k=0}^{\alpha_1 - 1} (-1)^k q_{1k}, \ \ b_{\alpha_k} = \sum_{i=0}^{\alpha_k - 1} (-1)^i q_{mi},$$

$$m = \begin{cases} 2, & \text{якщо } \alpha_k = 2n; \\ 3, & \text{якщо } \alpha_k = 2n - 1. \end{cases}$$

Теорема 2. *Хвильова діаграма росту цін Γ аналітично задається формулами* (2) *та* (6).

Зауваження 3. *Функція $y = f(x)$, визначена формулами* (2)*, є перетворювачем цифр Q^*-зображення аргумента в цифри $\widetilde{Q}$-зображення функції* [**3, 7**].

3. Фрактальні властивості графіка хвильової діаграми

Теорема 3. *Множина Γ є фракталом, розмірність Хаусдорфа-Безиковича якого можна знайти з співвідношення*

$$\alpha_0(\Gamma) = \max\left\{\alpha_1,\ \alpha_2\right\}, \tag{3}$$

де α_1 — додатне число, яке є розв'язком рівняння

$$q_{20}^{\alpha} + q_{22}^{\alpha} + q_{24}^{\alpha} + q_{36}^{\alpha} = 1, \tag{4}$$

а α_2 — додатне число, яке є розв'язком рівняння

$$q_{21}^{\alpha} + q_{23}^{\alpha} + q_{35}^{\alpha} + q_{37}^{\alpha} = 1. \tag{5}$$

Доведення. Оскільки множина Γ є генетично самоподібною [**4**] з коефіцієнтами подібності, що визначаються елементами матриці Q, то її самоподібна розмірність (яка співпадає з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича) знаходиться з рівнянь (3)-(5). □

Наслідок 1. *При* $q = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ *розмірність Хаусдорфа-Безиковича графіка хвильової діаграми* $\alpha_0(\Gamma) \approx 1,032$.

4. Непрервність та ніде не диференційовність функції $y = f(x)$

Теорема 4. *Функція* $y = f(x)$, *визначена рівностями* (2), *неперервна на відрізку* $[0;1]$.

Доведення. Покажемо, що $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$ для довільної точки $x_0 \in (0;1)$.

Розглянемо два випадки:

1) зображення x_0 у вигляді (6) містить період (0), (4), (5) або (7);

2) зображення x_0 у вигляді (6) не містить вказаних періодів.

1) Розглянемо точку $x_0 = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_m(4)} = \Delta_{\alpha_1\ldots(\alpha_m+1)(5)}$, причому α_m — парне. Побудуємо послідовності $x_n = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_m\underbrace{4\ldots4}_{n}(0)}$ і $x'_n = \Delta_{\alpha_1\ldots(\alpha_m+1)\underbrace{5\ldots5}_{n}(0)}$.

Покажемо, що $|f(x_n) - f(x_0)\,| \to 0$, при $n \to \infty$.

Розглянемо модуль різниці:

$$|f(x_n) - f(x_0)| = \left|\sum_{k=m+n}^{\infty} b_{\alpha_k(x_n)} \prod_{i=1}^{k-1} q_{mi} - \sum_{k=m+n}^{\infty} b_{\alpha_k(x_0)} \prod_{i=1}^{k-1} q_{2i}\right| = \left|\sum_{k=m+n}^{\infty} b_4 \prod_{i=1}^{k-1} q_{2i}\right|,$$

причому $\alpha_k(x_0) = 4$ і $b_4 = \sum\limits_{k=0}^{3} q_{2k} = q_{20} - q_{21} + q_{22} - q_{23}$.

Позначимо $q^* = \max\limits_i \{q_{2i}\}$. Тоді $b_4 \le 4q^*$, $\prod\limits_{i=1}^{k-1} q_{2i} \le (q^*)^{k-1}$ і

$$|f(x_n) - f(x_0)\,| \le \sum_{k=m+n+1}^{\infty} 4q^*(q^*)^{k-1} \le$$

$$\le \sum_{k=m+n+1}^{\infty} 4(q^*)^k = 4((q^*)^{m+n+1} + (q^*)^{m+n+2} + (q^*)^{m+n+j} + \ldots) =$$

$$= 4\frac{(q^*)^{m+n+1}}{1-q^*} \to 0,$$

при $n \to \infty$, оскільки $q^* < 1$.

Отже, ми показали, що в цьому випадку $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0)$.

Аналогічно, розглянувши послідовність $x'_n = \Delta_{\alpha_1\ldots(\alpha_m+1)\underbrace{5\ldots5}_{n}(0)}$, можна показати, що в цьому випадку $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$.

Якщо α_m — непарне, то розглянемо послідовності $x_0 = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_m(7)} = \Delta_{\alpha_1\ldots(\alpha_m+1)(0)}$ і аналогічними міркуваннями отримаємо: $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0)$ і $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$.

Виходячи з того, що $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0)$ і $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$, можна стверджувати, що задана функція неперервна у всіх точках $x \in (0;1)$, зображення яких у вигляді (6) містить період (0), (4), (5) або (7).

Міркуваннями, аналогічними до попередніх легко показати, що в точках 0 і 1 функція неперервна відповідно зправа і зліва.

2. Аналогічно, розглянувши послідовності $x_n = \Delta_{\alpha_1\ldots(\alpha_n+1)(5)}$ і $x'_n = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n(4)}$, доводимо неперервність функції $y = f(x)$ в довільній точці $x_0 = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}$, зображення якої у вигляді (6) не містить період (0), (4), (5) або (7). □

Теорема 5. *Функція* $y = f(x)$, *визначена рівностями* (2), *є ніде не диференційовною на* $[0;1]$.

Доведення. Розглянемо точку $x_0 = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}$. Побудуємо послідовності $x_n = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k(4)}$ і $x^{/}_n = \Delta_{\alpha_1\ldots(\alpha_k+1)(5)}$, при цьому будемо вважати, що α_k — парне.

1. Розглянемо послідовність $x_n = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k(4)}$. Очевидно, що $x_n < x_0$.

$$\Delta x = x_0 - x_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_4 \prod_{i=1}^{k-1} q_{2i} - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} q_{mi}.$$

Позначимо $q^* = \min\limits_i \{q_{mi}\}$, $q^{**} = \max\limits_i \{q_{2i}\}$, $a^* = \min\limits_{\alpha_k\in\{0;\ldots;7\}} \{a_{\alpha_k}\}$. Тоді

$$\prod_{i=1}^{k-1} q_{2i} \le (q^{**})^k, \quad \prod_{i=1}^{k-1} q_{mi} \ge (q^*)^k$$

і

$$x_0 - x_n \le a_4 \sum_{k=n+1}^{\infty} (q^{**})^k - a^* \sum_{k=n+1}^{\infty} (q^*)^k = a_4 \frac{(q^{**})^n}{1-q^{**}} - a^* \frac{(q^*)^n}{1-q^*}.$$

Легко бачити, що $\Delta x = x_0 - x_n \to 0$, при $n \to \infty$, оскільки $\frac{(q^{**})^n}{1-q^{**}} \to 0$ і $\frac{(q^*)^n}{1-q^*} \to 0$.

Також очевидно, що $y_n < y_0$. $\Delta y = y_n - y_0 = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} b_4 \prod\limits_{i=1}^{k-1} q_{i2} - \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} b_{\alpha_k} \prod\limits_{i=1}^{k-1} q_{im}$.

Позначимо $b^* = \min\limits_{\alpha_k\in\{0;\ldots;7\}} \{b_{\alpha_k}\}$. Тоді $\Delta y \le b_4 \dfrac{(q^{**})^n}{1-q^{**}} - b^* \dfrac{(q^*)^n}{1-q^*}$.

Легко бачити, що $\Delta y = y_0 - y_n \to 0$, при $n \to \infty$, оскільки $\dfrac{(q^{**})^n}{1-q^{**}} \to 0$ і $\dfrac{(q^*)^n}{1-q^*} \to 0$.

Розглянемо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$0 \le \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b_4 \frac{(q^{**})^n}{1-q^{**}} - b^* \frac{(q^*)^n}{1-q^*}}{a_4 \frac{(q^{**})^n}{1-q^{**}} - a^* \frac{(q^*)^n}{1-q^*}} \le \frac{b_4 \frac{(q^{**})^n}{1-q^{**}}}{a_4 \frac{(q^{**})^n}{1-q^{**}}} \qquad \left(\frac{b_4}{a_4} > 0\right).$$

2. Розглянемо $x^{/}_n = \Delta_{\alpha_1\ldots(\alpha_k+1)}(5)$. Очевидно, що $x_n > x_0$.

Аналогічно можна показати, що в цьому випадку відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ від'ємне. Значить, $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Отже, дана функція ніде не диференційовна.

$\square$

Література

[1] *Бернар И., Колли Ж.-К.* Толковый экономический и финансовый словарь. Т.1. — М.: Международные отношения, 1994. — 874 с.

[2] *Donald Saari* Mathematical Complexity of Simple Economics // Notices of the AMS, Volume 42, Number 2, February 1995. — P. 222 - 230.

[3] *Mandelbrot B. B.* The fractal geometry of nature. — New York: Freeman and Co., 1983. — 540 p.

[4] *Мандельброт Б.* Фракталы, случай и финансы. — Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2004. — 256 с.

[5] *Кроновер Р.* Фракталы и хаос в динамических системах. — М.: Постмаркет, 2000. — 352 с.

[6] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[7] *Працьовитий М. В.* Поліосновне Q-представлення та фрактальні математичні об'єкти з ним пов'язані // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — К.: Ін-ститут математики НАН України - НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — № 2. — С. 14-35.

[8] *Турбин А. Ф., Працевитый М. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — К.: Наук. думка, 1992. — 208 с.

[9] *Вильямс Б.* Новые измерения в биржевой торговле. — М.:ИК Атлантика, 2000. — 262с.

[10] *Вильямс Б.* Торговый хаос. Экспертные методики максимизации прибыли. — М.: ИК Аналитика, 2000. — 305с.

[11] Фракталы в физике: Тр. VI Междунар. симпоз. по фракталам в физике, Триест, 9-12 июля 1985. — М.: Мир, 1988. — 672 с.

[12] *Фрост А. Дж., Пректер Р.* Волновой принцип Эллиота. — М., 2001.

[13] *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики (том 1, Факты и модели, том 2, Теория). — М.: Изд-во ФАЗИС, 1998.