

УДК 539.3

Численное решение пространственной контактной задачи о взаимодействии упругих тел, имеющих шероховатые поверхности

А. И. Александров, Е. В. Грабко
(Запорожский национальный университет)

АННОТАЦИЯ. В работе предложен алгоритм численного решения статической пространственной контактной задачи о взаимодействии упругих шероховатых тел при отсутствии трения между ними и заранее неизвестной поверхности контакта. Алгоритм основан на сведении решаемой задачи к нелинейному интегральному уравнению, последующей дискретизации этого уравнения и использовании итерационных процессов для получения решения дискретизированного уравнения. Приведены результаты численного решения задачи о вдавливании гладкого параболического штампа в упругое полупространство с шероховатой поверхностью.

АБСТРАКТ. The algorithm on the numerical solution of static three-dimensional frictionless contact problem, connected with the interaction between the elastic bodies, where possible unknown contact surface, has been proposed. This algorithm consists of the reduce solved problem into the nonlinear integral equation, consequence discretization of this equation and the use of iteration processes for the obtain solution of the discretized equation. The numerical results for a problem on indentation of the rigid parabolic stamp in the elastic half-space with the rough surface is demonstrated.

1. Введение

Использование нелинейных интегральных уравнений для моделирования контактного взаимодействия упругих тел [1-7] позволяет разрабатывать эффективные итерационные методы решения контактных задач и дает возможность избавиться от основной трудности реализации вариационных методов, которая заключается в

необходимости рассматривать достаточно сложные задачи нелинейного программирования. Основные и наиболее известные из таких уравнений [1-4] являются операторными уравнениями первого рода, для которых поиск эффективных итерационных процессов получения приближенного решения является весьма трудной задачей. Нелинейные интегральные уравнения, использованные в работах [6, 7], являются операторными уравнениями второго рода, позволяют учитывать шероховатость поверхностей взаимодействующих тел и могут быть использованы для разработки эффективного численного алгоритма решения контактных задач, основанного на построении простых для программной реализации сходящихся итерационных процессов. Цель данной статьи заключается в разработке такого алгоритма.

2. Интегральное уравнение контактной задачи

Рассмотрим статическую пространственную контактную задачу о взаимодействии двух упругих тел при отсутствии трения между ними и неизвестной заранее поверхности контакта. Будем полагать, что взаимодействующие тела имеют шероховатые поверхности и могут быть аппроксимированы упругими полупространствами. При определенных допущениях [6, 7] рассматриваемая задача сводится к решению нелинейного интегрального уравнения [7]

$$p(s) = h(p(s) - E(f(p(s)) + A(p)(s) - g(s))) ; \quad s \in \Omega, \quad (1)$$

в котором неизвестная функция $p(s)$ отыскивается в пространстве $L_2(\Omega)$ [8] и представляет собой распределение контактных давлений в заданной плоской ограниченной области Ω , содержащей в себе неизвестную площадку контакта и расположенной в общей для тел касательной плоскости G , проходящей через точку их начального касания. В уравнении (1) E есть произвольная положительная постоянная и линейный ограниченный интегральный оператор влияния $A : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ задается соотношениями

$$\begin{cases} A(p)(s) = \int_{\Omega} K(s, t) p(t) dt, & s \in \Omega; \\ K(s, t) = \frac{c}{|s - t|}, \end{cases} \quad (2)$$

где $|s - t|$ есть расстояние между точками s и t плоскости G , $c = (1 - \nu_1^2) \cdot (\pi E_1)^{-1} + (1 - \nu_2^2) \cdot (\pi E_2)^{-1}$, параметры ν_1, ν_2, E_1, E_2 представляют собой коэффициенты Пуассона и модули Юнга взаимодействующих тел [6].

Содержащиеся в правой части уравнения (1) функции $h(x)$ и $g(s)$ задаются соотношениями:

$$\begin{cases} h(x) = \frac{1}{2}(x + |x|) & \forall x \in R; \\ g(s) = -\delta_0(s) + \Delta & \forall s \in \Omega, \end{cases} \quad (3)$$

где R - множество всех действительных чисел, $\delta_0(s) \geq 0$ - зазор между телами в момент их начального касания, измеренный в направлении нормали к плоскости G , и $\Delta > 0$ есть сближение тел, рассматриваемых как абсолютно жесткие, в направлении той же нормали. Наконец, выражение $f(p(s))$ в уравнении (1) задает смятие поверхностных слоев тел и учитывает деформации микронеровностей, образующих шероховатость [7]. Будем полагать, что функция $f(x)$ в этом выражении является непрерывной, строго возрастающей, нечетной и неограниченной на всей действительной числовой прямой [7]. Кроме этого предположим, что $f(p(s)) \in L_2(\Omega)$ для каждой функции $p(s) \in L_2(\Omega)$.

Получение точного или приближенного решения интегрального уравнения (1) аналитическими методами сопряжено со значительными трудностями, главная из которых заключается в том, что плоская поверхность контакта тел является заранее неизвестной и может иметь очень сложную конфигурацию. Поэтому для решения данного уравнения целесообразно использовать численные методы, основанные на его дискретизации.

3. Дискретизация интегрального уравнения

Заменив в уравнении (1) линейный ограниченный оператор $A : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ вида (2) на близкий к нему линейный ограниченный оператор $A_n : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$, а элемент $g(s) \in L_2(\Omega)$ вида (3) на близкий к нему элемент $g_n(s) \in L_2(\Omega)$, получим уравнение

$$p(s) = h(p(s) - E(f(p(s)) + A_n(p)(s) - g_n(s))), \quad s \in \Omega. \quad (4)$$

Входящие в уравнение (4) аппроксимирующий оператор A_n и аппроксимирующий элемент $g_n(s)$ построим так, чтобы это уравнение имело решение в классе определенных на Ω кусочно-постоянных функций. Для этого введем на плоскости G декартову систему координат с центром в точке начального касания тел и зададим область Ω на G в виде открытого квадрата площади d , ограниченного отрезками прямых, параллельных координатным осям этой системы. Далее для натурального числа n разобьем область Ω на n^2 непересекающихся квадратных областей $\omega_1^n, \omega_2^n, \dots, \omega_{n^2}^n$ равной площади, ориентированных подобно квадрату Ω . Обозначив символом s_i^n центр квадрата ω_i^n , зададим оператор $A_n : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ и элемент $g_n(s) \in L_2(\Omega)$ следующими соотношениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n(p)(s) = \int_{\Omega} K_n(s, t) p(t) dt; \\ K_n(s, t) = \alpha_{ij}^{(n)}, \quad \text{если } s \in \omega_i^n \text{ и } t \in \omega_j^n; \\ \alpha_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \frac{c}{|s_i^n - s_j^n|}, & \text{если } i \neq j; \\ \frac{cn^2}{d} \int_{\omega_i^n} \frac{dt}{|s_i^n - t|}, & \text{если } i = j; \end{cases} \\ g_n(s) = g(s_i^n), \quad \text{если } s \in \omega_i^n. \end{array} \right. \quad (5)$$

В работе [9] доказано, что аппроксимирующие последовательности $\{A_n\}$, $\{g_n\}$, построенные по правилу (5), сходятся к оператору $A : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ вида (2) и к элементу $g(s) \in L_2(\Omega)$ соответственно, если функция $g(s)$ определена и непрерывна на замыкании области Ω . Нетрудно убедиться, что для оператора A_n и элемента g_n , заданных равенствами (5), интегральное уравнение (4) сводится к следующей системе n^2 скалярных уравнений с n^2 неизвестными:

$$x_i = h \left(x_i - E \left(f(x_i) + \sum_{j=1}^{n^2} b_{ij} x_j - g_i \right) \right), \quad i = \overline{1, n^2}. \quad (6)$$

Связь между неизвестными x_1, x_2, \dots, x_{n^2} и функцией $p(s)$, удовлетворяющей уравнению (4), такова, что $p(s) = x_i$ для всех $s \in \omega_i^n$. Входящие в систему (6) параметры b_{ij} и g_i определяются из следующих очевидных соотношений:

$$b_{ij} = \alpha_{ij}^{(n)} \frac{d}{n^2}, \quad g_i = g(s_i^n); \quad i, j = \overline{1, n^2}. \quad (7)$$

Таким образом, численное решение интегрального уравнения (1) сводится к отысканию решения системы скалярных уравнений (6), для которой входящие в неё числовые параметры b_{ij} , g_i задаются равенствами (7).

4. Итерационный процесс для решения дискретизированного уравнения

Решение системы нелинейных уравнений (6) можно получить, используя итерационный процесс

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i^{(0)} = 0, \quad i = \overline{1, n^2}; \\ x_i^{(m)} = h \left(x_i^{(m-1)} - E \left(f \left(x_i^{(m-1)} \right) + \sum_{j=1}^{n^2} b_{ij} x_j^{(m-1)} - g_i \right) \right), \quad i = \overline{1, n^2}; \\ m = 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (8)$$

Для обеспечения сходимости этого процесса необходимо параметр E , входящий в правые части равенств (8), выбирать следующим образом:

$$0 < E \leq \frac{1}{L + \max_{1 \leq i \leq n^2} \left(\sum_{j=1}^{n^2} |b_{ij}| \right)}. \quad (9)$$

Здесь значение положительной константы L зависит от вида функции $f(x)$. Если функция $f(x)$ задана соотношением

$$f(x) = B \cdot (|x|)^K \cdot \text{sign}(x), \quad (10)$$

в котором $B > 0$ и $K \in (0, 1]$, то, как показал численный эксперимент, приемлемым является выбор значения L в соответствии с неравенством

$$L \geq B \cdot K \cdot (x_0 \cdot 10^{-3})^{K-1}, \quad (11)$$

где x_0 есть наибольшее из значений x_1, x_2, \dots, x_{n^2} , удовлетворяющих системе (6).

5. Численные результаты

С целью апробации предложенного алгоритма было получено численное решение контактной задачи о вдавливании силой $F = 36054$ Н гладкого параболического штампа в упругое полупространство, имеющее шероховатую поверхность (такое значение F получено по результатам численного решения задачи при $\Delta = 1.85 \times 10^{-4}$ м). Начальный зазор $\delta_0(x, y)$ между взаимодействующими телами задан соотношением

$$\delta_0(x, y) = \frac{x^2}{2r_0} + \frac{y^2}{2r_0}; \quad (x, y) \in \Omega,$$

в котором $r_0 = 0.05$ м. Коэффициент Пуассона ν_2 и модуль Юнга E_2 полупространства приняты равными 0.3 и 210000 МПа соответственно. Функция $f(x)$, при помощи которой учитывается шероховатость, задана соотношением (10), в котором $K = 0.4$, $B = 1.7 \times 10^{-7.8}$ м/(Па)^{0.4}.

Численное решение задачи получено на сетке, состоящей из $25 \times 25 = 625$ квадратных граничных элементов, площадь каждого из которых равна $16 \cdot 10^{-8}$ м² ($n = 25$, $d = 10^{-4}$ м²). Входящие в систему (6) числовые параметры b_{ij} и g_i вычислялись по формулам (5), (7). Для получения результатов использовался итерационный процесс (8), в котором значение E выбиралось наибольшим из всех возможных значений, задаваемых соотношением (9). Значение константы L , входящей в (9), выбиралось как наименьшее из всех её возможных значений, удовлетворяющих неравенству (11) при $x_0 = 10^8$ Па. При реализации итерационного процесса (8) после совершения $m = 750$ итераций выполнилось неравенство

$$\frac{\max_{i=1,625} |x_i^{(m)} - x_i^{(m-1)}|}{\max_{i=1,625} (x_i^{(m)})} < 0.00044.$$

Обозначив через b половину длины стороны квадрата Ω ($b = 0.005$ м), найдем значения безразмерных параметров A_0 , A , P , δ , ρ из следующих соотношений [5]:

$$A_0 = \frac{b}{2r_0}; \quad A = \frac{B(2\pi\theta)^K}{b}; \quad P = \frac{F}{2\pi\theta b^2}; \quad \delta = \frac{\Delta}{b}; \quad \rho = \frac{a}{b},$$

где $K = 0.4$, $\theta = E_2 / (2(1 - \nu_2^2))$, $a = 0.004$ м - радиус контактного пятна, найденный по результатам численного решения задачи. Эти значения таковы: $A_0 = 0.05$; $A = 0.3$; $P = 0.00199$; $\delta = 0.037$; $\rho = 0.8$.

В работе [5] приведены результаты решения рассмотренной контактной задачи для случая $A_0 = 0.05$, $A = 0.3$, $\delta = 0.037$, $P = 0.00199$, который и был выбран для апробации предложенного алгоритма. Полученное в [5] значение ρ составляет 0.82, что очень хорошо соответствует расчётному значению 0.8. Таким образом, относительная погрешность в определении радиуса контактного пятна составляет примерно 2.5%.

Для более полного анализа полученных численных результатов проведено сопоставление найденного распределения безразмерной величины $q\left(\frac{x}{b}, \frac{y}{b}\right) = p(x, y) / (2\pi\theta)$ при $y = 0$, $0 \leq (x/b) \leq 1$ с аналогичным распределением, представленным в работе [5]. На рисунке 1 сплошной линией изображен график функции $q(r, 0)$, приведенный в [5], а кружочками - отдельные точки графика этой функции, найденные по результатам численного решения.

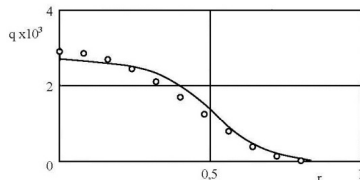


Рис. 1

Анализ зависимостей $q(r, 0)$, изображенных на рисунке 1, свидетельствует об их хорошем соответствии. Наибольшее взаимное уклонение сравниваемых функций не превосходит 9.5% по отношению к наибольшему значению $q(0, 0)$, указанному в работе [5].

Література

- [1] *Галанов Б.А.* Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта // ПММ. – 1985. – Т. 49. – Вып. 5. – С. 827-835.
- [2] *Галанов Б.А.* Нелинейные граничные уравнения контактных задач теории упругости // Докл. АН СССР. – 1987. – Т. 296. – № 4. – С. 812-815.
- [3] *Пожарский Д.А.* О пространственной контактной задаче для упругого клина с неизвестной областью контакта // ПММ. – 1995. – Т. 59. – Вып. 5. – С. 812-818.
- [4] *Александров В.М., Kalker J.J., Пожарский Д.А.* Пространственная контактная задача для двухслойного упругого основания с заранее неизвестной областью контакта // Изв. РАН, МТТ. – 1999. – № 4. – С. 51-55.
- [5] *Александров В.М., Пожарский Д.А.* Трехмерные контактные задачи при учете трения и нелинейной шероховатости // ПММ. – 2004. – Т. 68. – Вып. 3. – С. 516-527.
- [6] *Александров А.И.* Решение задач контактного взаимодействия упругих тел с использованием нелинейных операторных уравнений. – Днепропетровск.: Ин-т технической механики АН УССР, 1989. – 74 с. – (Препринт / АН УССР, Ин-т технической механики; 89-2).
- [7] *Александров А.И., Матушко Ю.О.* Решение пространственной контактной задачи о вдавливании штампа в упругое основание // Вісник Дніпропетр. ун-ту. – 2003. – Вып. 7, т. 1. – С. 123-131.
- [8] *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 752 с.
- [9] *Александров А.И.* Вопросы существования решений некоторых нелинейных интегральных уравнений. – Днепропетровск: ДГУ, 1991. – 48 с.