Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова.— 2008, № 9.— С. 200–211.

УДК 511.72

Зображення чисел знакододатними рядами Люрота: основи метричної теорії

Ю. І. Жихарєва, М. В. Працьовитий
(Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова)

Анотація. Систематизовано відомості про розклади чисел $x \in (0,1]$ в ряди Люрота: $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_1(d_1-1)d_2}+\ldots+\frac{1}{d_1(d_1-1)d_2(d_2-1)\ldots d_{n-1}(d_{n-1}-1)d_n}+\ldots$, де $d_n \geqslant 2$. Досліджується геометрія таких зображень (властивості циліндричних множин, геометричні властивості цифр, метричні відношення), розв'язуються метричні задачі, висвітлюються критерії раціональності та ірраціональності чисел. Для довільного заданого ряду Люрота вивчаються тополого-метричні та фрактальні властивості множини неповних сум (підсум).

Abstract. Some information on the expansions of real numbers $x \in (0,1]$ in the form of the Lüroth series $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_1(d_1-1)d_2}+\ldots+\frac{1}{d_1(d_1-1)d_2(d_2-1)\ldots d_{n-1}(d_{n-1}-1)d_n}+\ldots$, where $d_n \geqslant 2$, is systematized. We study the geometry of such representations (properties of cylindrical sets, geometrical properties of digits, metric relations), solve some metric problems and discuss the criterions of rationality and irrationality of numbers. For any given Lüroth series, topological, metric and fractal properties of the set of incomplete sums (i.e., subsums) are studied in detail.

Вступ

У 1883 році J. Lüroth (далі Люрот) [**11**] розглянув розклади чисел $x \in (0,1]$ у знакододатні ряди, члени яких є числами, оберненими до натуральних:

$$x=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_1(d_1-1)d_2}+...+\frac{1}{d_1(d_1-1)d_2(d_2-1)...d_{n-1}(d_{n-1}-1)d_n}+...,$$

де $d_n \geqslant 2$.

Він знайшов критерій раціональності та ірраціональності числа в термінах такого зображення. Зображення чисел рядами Люрота епізодично фігурували в наступних дослідженнях. Хоча аналог такого зображення, але знакозмінними рядами, досліджувався в декількох роботах [**6**]-[**10**]. Ідея використовувати різні способи зображення чисел для задання фракталів та математичних об'єктів зі складною локальною будовою виявилась продуктивною [**5**]. Сподіваємось, шо грунтовний систематичний виклад основ метричної теорії зображень чисел рядами Люрота сприятиме їх широкоплановому застосуванню.

1. Означення та приклади рядів Люрота

Означення 1. *Числовим знакододатним рядом Люрота* (далі: рядом Люрота) називається вираз виду

$$\begin{aligned}&\frac{1}{d_1+1}+\frac{1}{d_1(d_1+1)(d_2+1)}+\frac{1}{d_1(d_1+1)d_2(d_2+1)(d_3+1)}+...\\&...+\frac{1}{d_1(d_1+1)d_2(d_2+1)...d_{n-1}(d_{n-1}+1)(d_n+1)}+...,\end{aligned}\tag{1}$$

де d_n — фіксований нескінченний набір натуральних чисел.

Число d_n називатимемо *n-тим елементом ряду Люрота* (1). Якщо послідовність (d_n) елементів ряду Люрота є сталою, причому $d_n = 1$, то ряд набуває вигляду

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^n}+...$$

Його ми називатимемо *двійковим.*

Прикладами рядів Люрота є наступні ряди:

1. $\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 3^2}+\frac{1}{2^2\cdot 3^3}+...+\frac{1}{2^{n-1}\cdot 3^n}+...=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{2}{5}$;

2. $\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s(s+1)^2}+\frac{1}{s^2(s+1)^3}+...=\frac{\frac{1}{s+1}}{1-\frac{1}{s(s+1)}}=\frac{s}{s(s+1)-1}$;

3. Якщо $d_n = n$, то

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+...+\frac{1}{1\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot ...\cdot (n-1)^2\cdot n\cdot (n+1)}+...$$

Очевидно, має місце наступне твердження.

Лема 1. *Для залишку r_n ряду Люрота* (1) *мають місце співвідношення:*

$$\begin{aligned}r_n&=\frac{1}{d_1(d_1+1)d_2(d_2+1)...d_n(d_n+1)}\left(\frac{1}{d_{n+1}+1}+\frac{1}{d_{n+1}\,(d_{n+1}+1)\,(d_{n+2}+1)}+...\right)\leqslant\\&\leqslant\frac{1}{d_1(d_1+1)d_2(d_2+1)...d_n(d_n+1)}\leqslant\frac{1}{2^n}\to 0\quad (n\to\infty)\ .\end{aligned}$$

Лема 2. *Кожен ряд Люрота є збіжним, причому його сума належить півінтервалу* $(0,1]$.

Доведення. Оскільки, для членів ряду Люрота (1) має місце нерівність

$$\frac{1}{d_1(d_1+1)d_2(d_2+1)...d_{n-1}(d_{n-1}+1)(d_n+1)} \leqslant \frac{1}{2^n},$$

то його збіжність випливає з ознаки порівняння.

Таким чином, для суми S ряду (1) виконуються нерівності $\frac{1}{d_1+1} < S \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, що й треба було довести. □

Легко бачити, що існує континуальна множина рядів Люрота, оскільки кожен з них визначається нескінченною послідовністю натуральних чисел.

2. Множина неповних сум ряду Люрота

Означення 2. Якщо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d_1(d_1+1)d_2(d_2+1)...d_{n-1}(d_{n-1}+1)(d_n+1)} \tag{2}$$

— заданий ряд Люрота, M — фіксована підмножина множини натуральних чисел, то число

$$x = x(M) = \sum_{n \in M \subset N} \frac{1}{d_1(d_1+1)d_2(d_2+1)...d_{n-1}(d_{n-1}+1)(d_n+1)}$$

називається його (заданого ряду) *неповною сумою.*

Неповну суму x ряду Люрота (2), залежну від множини M, можна подати у вигляді

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d_1(d_1+1)d_2(d_2+1)...d_{n-1}(d_{n-1}+1)(d_n+1)}, \tag{3}$$

де $\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n \in M, \\ 0, & n \notin M. \end{cases}$

Множину всіх неповних сум заданого ряду Люрота позначатимемо S_L, тобто

$$S_L = \left\{x : x = x(M),\ M \in 2^N\right\}.$$

Означення 3. Циліндром рангу m з основою $c_1...c_m$ називається множина

$$\Delta^{S_L}_{c_1...c_m} = \left\{x : \quad x = \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{D_i} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{D_i}, \quad \varepsilon_i \in \{0,1\}\right\},$$

де $D_i = d_1(d_1+1)d_2(d_2+1)...d_{i-1}(d_{i-1}+1)(d_i+1) = D_{i-1}d_{i-1}(d_i+1)$.

Легко бачити, що

$$\inf \Delta^{S_L}_{c_1...c_m} = \min \Delta^{S_L}_{c_1...c_m} = \sum_{n=1}^{m} \frac{c_n}{D_n} = a_{c_1...c_m},$$

$$\sup \Delta^{S_L}_{c_1...c_m} = \max \Delta^{S_L}_{c_1...c_m} = \frac{1}{D_m} + \sum_{n=1}^{m} \frac{c_n}{Dn} = b_{c_1...c_m}.$$

Означення 4. Циліндричним відрізком (інтервалом) з основою $c_1...c_m$ називається відрізок (інтервал), кінці якого співпадають з кінцями циліндра $\Delta^{S_L}_{c_1...c_m}$, вони відповідно позначаються $\left[\Delta^{S_L}_{c_1c_2...c_m}\right]$ та $\nabla^{S_L}_{c_1c_2...c_m}$, причому

$$\left[\Delta^{S_L}_{c_1c_2...c_m}\right] = \left[a_{c_1...c_m}, b_{c_1...c_m}\right], \quad \nabla^{L}_{c_1c_2...c_m} = \left(a_{c_1...c_m}, b_{c_1...c_m}\right).$$

Циліндричні множини мають властивості:

1. $\Delta^{S_L}_{c_1...c_m} = \Delta^{S_L}_{c_1...c_m0} \cup \Delta^{S_L}_{c_1...c_m1}$;
2. Циліндри одного рангу мають однаковий діаметр, а саме:

$$d\left(\Delta^{S_L}_{c_1...c_m}\right) = \frac{1}{d_1(d_1+1)d_2(d_2+1)...d_m(d_m+1)} \to 0 \quad (m \to \infty)\ ;$$

3. $\nabla^{S_L}_{c_1...c_m0} \cap \nabla^{S_L}_{c_1...c_m1} = \varnothing$;
4. $\sup \Delta^{S_L}_{c_1...c_m0} \leqslant \inf \Delta^{S_L}_{c_1...c_m1}$, причому $\sup \Delta^{S_L}_{c_1...c_m0} = \inf \Delta^{S_L}_{c_1...c_m1} \Leftrightarrow d_{m+1} = 1$;
5. $\dfrac{d\left(\Delta^{S_L}_{c_1...c_m0}\right) + d\left(\Delta^{S_L}_{c_1...c_m1}\right)}{d\left(\Delta^{S_L}_{c_1...c_m}\right)} = \dfrac{2}{d_{m+1}(d_{m+1}+1)}$;

Наслідок 1. *Якщо $d_{m+1} = 1$, то $\left[\Delta^{S_L}_{c_1...c_m}\right] = \left[\Delta^{S_L}_{c_1...c_m0}\right] \cup \left[\Delta^{S_L}_{c_1...c_m1}\right]$,
якщо $d_{m+1} \neq 1$, то $\dfrac{d\left(\Delta^{S_L}_{c_1...c_m0}\right) + d\left(\Delta^{S_L}_{c_1...c_m1}\right)}{d\left(\Delta^{S_L}_{c_1...c_m}\right)} \leqslant \dfrac{1}{3}$.*

6. $\left[\Delta^{S_L}_{c_1...c_m}\right] \setminus \left(\left[\Delta^{S_L}_{c_1...c_m0}\right] \cup \left[\Delta^{S_L}_{c_1...c_m1}\right]\right) =$

$$= \left(a_{c_1...c_m} + \frac{1}{d_1(d_1+1)...d_{m+1}(d_{m+1}+1)}; a_{c_1...c_m} + \frac{1}{d_1(d_1+1)...d_m(d_m+1)(d_{m+1}+1)}\right).$$

Наслідок 2. *Якщо $d_{n+1} = 1$, то $\left[\Delta^{S_L}_{c_1...c_m}\right] = \left[\Delta^{S_L}_{c_1...c_m0}\right] \cup \left[\Delta^{S_L}_{c_1...c_m1}\right]$.*

Теорема 1. *Множина неповних сум ряду Люрота S_L є*

(1) відрізком $[0,1]$, якщо $d_n = 1$ $\forall n \in N$;

(2) об'єднанням скінченого числа двійкових циліндрів (відрізків), якщо $d_n = 1$ для всіх n, більших деякого m;

(3) ніде не щільною, досконалою множиною нульової міри Лебега, якщо $d_n \neq 1$ для нескінченної множини значень n.

Доведення. 1) Якщо $d_n = 1$ для довільного $n \in N$, тобто ряд Люрота є двійковим, то кожна його неповна сума має двійкове зображення. І навпаки, кожне число відрізка $[0,1]$, будучи розкладеним в двійковий дріб, очевидно, є неповною сумою ряду Люрота.

Твердження 2) випливає з твердження 1) і наслідка 1 властивості 5 циліндричних множин.

3) Нехай $F_0 = (0;1]$, $F_k = \bigcup\limits_{i_1=0}^{1} \dots \bigcup\limits_{i_k=0}^{1} [\Delta^{S_L}_{i_1 i_2 \dots i_k}]$. Тоді

$$S_L \subset F_k \subset F_{k+1} \quad \forall k \in N \quad \text{i} \quad \lambda(S_L) \leq \lim_{k\to\infty} (F_k).$$

Але $\dfrac{\lambda(F_{k_n})}{\lambda(F_{k_n-1})} \leq \dfrac{1}{3}$, якщо $d_{k_n} \neq 1$. Тому

$$\lim_{k\to\infty} \lambda(F_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})} \cdot \frac{\lambda(F_{k-1})}{\lambda(F_{k-2})} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda(F_1)}{\lambda(F_0)} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{k_n}} = 0.$$

Отже, $\lambda(S_L) = 0$. □

Теорема 2. *Якщо послідовність (d_n) є сталою $d_n = const = d > 1$, то множина неповних сум відповідного ряду Люрота є самоподібною множиною, самоподібна розмірність якої*

$$\alpha_c(S_L) = \log_u 2, \qquad \text{де} \quad u = \frac{(d-1)(d+2)}{d(d+1)}$$

співпадає з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича.

Доведення. Оскільки

$$S_L = S_L^{(1)} \cup S_L^{(2)}, \quad \text{де} \quad S_L^{(i)} = \Delta_i \cap S_L, \quad S_L \overset{u}{\sim} S^{(i)},\ i = 0,1,$$

то множина S_L є самоподібною. Тоді рівняння для визначення самоподібної розмірності має вигляд $u^x + u^x = 1$, звідки $x = \log_u 2$.

Оскільки S_L є досконалою множиною, то її самоподібна розмірність співпадає з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича. □

Наслідок 3. *Якщо послідовність (d_n) є сталою, починаючи з номера m, то множина неповних сум відповідного ряду Люрота є фрактальною множиною з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича $\log_u 2$, яка є об'єднанням 2^m конгруентних між собою самоподібних множин.*

3. Розподіл випадкової неповної суми заданого ряду Люрота

Означення 5. Подання числа $x \in S_L$ у вигляді

$$x = x(m) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta^{S_L}_{d_1 \dots d_m}$$

називатимемо його *циліндричним зображенням* і позначатимемо $\Delta^{S_L}_{d_1 \dots d_m \dots}$.

Для заданого ряду Люрота (2) розглядається випадкова величина $\xi = \Delta^{S_L}_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_n \dots}$ символи τ_n циліндричного зображення якої є незалежними і мають розподіли

$$P\{\tau_n = 0\} = p_{0n} \geqslant 0, \quad P\{\tau_n = 1\} = p_{1n} \geqslant 0, \quad p_{0n} + p_{1n} = 1.$$

Теорема 3. *Розподіл випадкової величини ξ є чистим, причому:*
1) чисто дискретним тоді і тільки тоді, коли

$$M = \prod_{n=1}^{\infty} \max\{p_{0n}, p_{1n}\} > 0; \tag{4}$$

2) сингулярно неперервним розподілом канторівського типу, якщо $M = 0$.

Доведення. Оскільки випадкова величина ξ є випадковою величиною Джессена-Вінтнера (див. [**5**]), то вона має чистий розподіл: чисто дискретний, чисто абсолютно неперервний або чисто сингулярний. Згідно з теоремою П.Леві її розподіл є чисто дискретним тоді і тільки тоді, коли виконується нерівність (4). Отже, $M = 0$ є необхідною і достатною умовою неперервності.

Оскільки спектром розподілу ξ є множина S_L неповних сум ряду Люрота, а вона має міру Лебега рівну нулю, то при $M = 0$ розподіл ξ є сингулярним, причому канторівського типу. □

4. Розклад дійсного числа в ряд Люрота

Теорема 4. *Кожне число $x \in (0, 1]$ єдиним чином розкладається в ряд Люрота, тобто для числа x існує єдина послідовність натуральних чисел (d_n), $d_n = d_n(x)$ така, що*

$$x = \frac{1}{d_1 + 1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{d_1(d_1+1)d_2(d_2+1)...d_{n-1}(d_{n-1}+1)(d_n+1)}. \tag{5}$$

Доведення. *Існування.* Оскільки $(0; 1] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, то очевидно, що існує d_1 таке, що $\dfrac{1}{d_1+1} < x \leq \dfrac{1}{d_1}$. Тоді

$$0 < x - \frac{1}{d_1+1} \equiv x_1 \leq \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_1+1} = \frac{1}{d_1(d_1+1)}.$$

Оскільки $\left(0; \dfrac{1}{d_1(d_1+1)}\right] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{d_1(d_1+1)(n+1)}; \dfrac{1}{d_1(d_1+1)n}\right]$, то очевидно, що для $x_1 \in \left(0; \dfrac{1}{d_1(d_1+1)}\right]$ існує $d_2 \in N$ таке, що $\dfrac{1}{d_1(d_1+1)(d_2+1)} < x_1 \leq \dfrac{1}{d_1(d_1+1)d_2}$. Звідки

$$0 < x_1 - \frac{1}{d_1(d_1+1)(d_2+1)} \equiv x_2 \leq \frac{1}{d_1(d_1+1)d_2(d_2+1)}$$

$$\text{і} \quad x = \frac{1}{d_1+1} + x_1 = \frac{1}{d_1+1} + \frac{1}{d_1(d_1+1)(d_2+1)} + x_2.$$

Далі проводимо аналогічні міркування стосовно $x_2 \in \left(0; \frac{1}{d_1(d_1+1)d_2(d_2+1)}\right]$ і т.д. до нескінченності. В результаті отримуємо розклад (5).

Збіжність ряду (5), рівносильно збіжності процесу розкладу числа в ряд, випливає з того, що

$$x_m < \frac{1}{d_1(d_1+1)d_2(d_2+1)...d_m(d_m+1)} < \frac{1}{2^m} \to 0 \quad (m \to \infty).$$

Єдиність (від супротивного). Припустимо, що деяке x має принаймні два різних L-зображення $x = \Delta^L_{d_1...d_{m-1}d_m d_{m+1}...} = \Delta^L_{d_1...d_{m-1}d'_m d'_{m+1}...}$, де $d_m \neq d'_m$.

Не порушуючи загальності, вважатимемо, що $d'_m < d_m$. Тоді

$$\delta \equiv \Delta^L_{d_1...d_{m-1}d'_m d'_{m+1}...} - \Delta^L_{d_1...d_{m-1}d_m d_{m+1}...} = \frac{1}{d_1(d_1+1)...d_m(d_m+1)} \cdot \delta_1,$$

де

$$\delta_1 \equiv \tfrac{1}{d_m+1} - \tfrac{1}{d'_m+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{d'_m(d'_m+1)d'_{m+1}(d'_{m+1}+1)...d'_{m+n-1}(d'_{m+n-1}+1)(d'_m+n+1)} -$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{d_m(d_m+1)d_{m+1}(d_{m+1}+1)...d_{m+n-1}(d_{m+n-1}+1)(d_m+n+1)}.$$

Але

$$\delta_1 > \left(\tfrac{d_m-d'_m}{(d'_m+1)(d_m+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{d_m(d_m+1)d_{m+1}(d_{m+1}+1)...d_{m+n-1}(d_{m+n-1}+1)(d_m+n+1)}\right) \geq$$
$$\geq \tfrac{1}{(d'_m+1)(d_m+1)} - \tfrac{1}{d_m(d_m+1)}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{2^3} + ...\right) = 0.$$

Отже, $\delta_1 > 0$, що суперечить тому, що розглядаються два різні L-зображеннями одного і того ж числа. Це доводить єдність. □

5. Раціональність та ірраціональність чисел в L-зображеннях

Лема 3. *Якщо L-зображення числа $x \in (0,1]$ є періодичним, то число x є раціональним.*

Доведення. Нехай $x = \Delta^L_{d_1...d_m(d_{m+1}...d_{m+k})}$, тобто зображення числа x має період $(d_{m+1}...d_{m+k})$. Тоді

$$x = A + \frac{1}{d_m}BC + \frac{1}{d_{m+k}}BCD + \frac{1}{d_{m+k}}BCD^2 + ... = A + \frac{1}{d_m}BC + \frac{BCD}{d_{m+k}(1-D)},$$

де

$$A = \frac{1}{d_1+1} + \frac{1}{d_1(d_1+1)(d_2+1)} + ... + \frac{1}{d_1(d_1+1)...d_{m-1}(d_{m-1}+1)(d_m+1)},$$

$$B = \frac{1}{d_1(d_1+1)...d_{m-1}(d_{m-1}+1)(d_m+1)},$$

$$C = 1 + \frac{1}{d_{m+1}(d_{m+2}+1)} + ... + \frac{1}{d_{m+1}(d_{m+2}+1)...d_{m+k-1}(d_{m+k-1}+1)(d_{m+k}+1)},$$

$$D = \frac{1}{(d_{m+1}+1)d_{m+1}...d_{m+k-1}(d_{m+k-1}+1)(d_{m+k}+1)}.$$

Оскільки числа A, B, C, D раціональні, то число x є раціональним. □

Наслідок 4. *Якщо число є ірраціональним, то його L-зображення не має періода.*

Теорема 5. *Число $x \in (0,1]$ є раціональним тоді і тільки тоді, коли його зображення рядом Люрота є періодичним.*

Доведення. Необхідність. Нехай x_0 — довільне раціональне число $(0,1]$. Доведемо, що його L-зображення періодичне.

Для числа $x_0 = 1$ це виконується, оскільки $1 = \Delta^L_{11...1...}$.

Розглянемо число $x_0 = \Delta^L_{d_1 d_2 ... d_n ...} = \dfrac{p}{q} < 1$, де останній дріб нескоротний. Число x_0 можна подати у формі

$$x_0 = \frac{1}{d_1+1} + \frac{1}{d_1(d_1+1)(d_2+1)} + ... + \frac{1}{d_1(d_1+1)d_2(d_2+1)...d_{n-1}(d_{n-1}+1)} \cdot x_{n-1},$$

$$\text{де} \qquad x_{n-1} = \frac{1}{d_n+1} + \frac{1}{d_n(d_n+1)(d_{n+1}+1)} + ...$$

Очевидно, що $x_{n-1} = \Delta^L_{d_n d_{n+1} ... d_{n+k} ...}$ і

$$x_n = x_{n-1} d_n(d_n+1) - d_n. \tag{6}$$

Якщо для деякого натурального n має місце рівність $x_{n-1} = 1 = \Delta^L_{11...1...}$, то, враховуючи єдиність L-зображення, матимемо $x_0 = \Delta^L_{d_1 d_2 ... d_{n-1} 11...1...}$, а отже, зображення x_0 — періодичне.

Нехай $x_{n-1} \neq 1$ для довільного натурального n. Тоді з рівності (6) отримуємо

$$x_n = (x_{n-2} d_{n-1}(d_{n-1}+1) - d_{n-1}) d_n(d_n+1) - d_n =$$

$$= ((x_{n-3} d_{n-2}(d_{n-2}+1) - d_{n-2}) d_{n-1}(d_{n-1}+1) - d_{n-1}) d_n(d_n+1) - d_n =$$

$$= x_{n-3} d_{n-2}(d_{n-2}+1) d_{n-1}(d_{n-1}+1) d_n(d_n+1) - d_{n-2} d_{n-1}(d_{n-1}+1) d_n(d_n+1) -$$

$$- d_{n-1} d_n(d_n+1) - d_n = ... =$$

$$= x_0 d_1(d_1+1) d_2(d_2+1) ... d_n(d_n+1) - d_1 d_2(d_2+1) ... d_n(d_n+1) - ... - d_{n-1} d_n(d_n+1) - d_n =$$

$$= \frac{p d_1(d_1+1)...d_n(d_n+1) - q d_1 d_2(d_2+1)...d_n(d_n+1) - ... - q d_{n-1} d_n(d_n+1) - q d_n}{q} = \frac{p_n}{q}.$$

Оскільки $x_n < 1$, то $p_n < q$. Тому p_n, будучи числом натуральним, співпадає з одним із чисел $1, 2, ..., q-1$. Тоді існує натуральне число $c < q$ таке, що $p_n = p_{n+c}$, а отже, $x_n = x_{n+c}$.

Враховуючи єдиність L-зображення, маємо

$$\begin{cases} x_n = \Delta^L_{d_{n+1}d_{n+2}...} = \Delta^L_{d_{n+c+1}d_{n+c+2}...}, \\ d_{n+c+j} = d_{n+j} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

а отже, $d_{n+i} = d_{n+c+i} = d_{n+2c+i} = ... = d_{n+kc+i}$, $i = 1, ..., c-1$, тобто L-зображення числа x_0 є періодичним.

Достатність є наслідком леми 3. □

6. Циліндричні множини

Означення 6. Нехай $(c_1, c_2, ..., c_m)$ - фіксований набір натуральних чисел. *Циліндром* рангу m з основою $c_1c_2...c_m$ називається множина

$$\Delta^L_{c_1c_2...c_m} := \{x : x = \Delta^L_{c_1c_2...c_m d_{m+1}d_{m+2}...}, d_{n+i} \in N\}.$$

Означення 7. *Циліндричним відрізком (інтервалом)* з основою $c_1c_2...c_m$ називається відрізок (інтервал), кінці якого співпадають з кінцями циліндра, вони відповідно позначаються $\left[\Delta^L_{c_1c_2...c_m}\right]$ та $\nabla^L_{c_1c_2...c_m}$.

Циліндри мають наступні **властивості**:

1. $\Delta^L_{c_1c_2...c_m} = \bigcup\limits_{i_1=1}^{\infty} ... \bigcup\limits_{i_k=1}^{\infty} \Delta^L_{c_1...c_m i_1 i_2...i_k}, \forall k \in N.$

2. Циліндр $\Delta^L_{c_1c_2...c_m}$ є півінтервалом з кінцями

$$\inf \Delta^L_{c_1...c_m} = \frac{1}{c_1+1} + ... + \frac{1}{c_1(c_1+1)...c_{m-1}(c_{m-1}+1)(c_m+1)} = \varphi(c_1, c_2, ..., c_m) = a_m$$

$$\sup \Delta^L_{c_1...c_m} = a_m + \frac{1}{b_m \cdot 2} + \frac{1}{b_m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2} + ... = a_m + \frac{1}{b_m \cdot 2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ...\right) = a_m + \frac{1}{b_m},$$

де $b_m = c_1(c_1+1)...c_m(c_m+1)$

$$\Delta^L_{c_1...c_m} = \left(a_m, a_m + \frac{1}{b_m}\right] = \left(a_m, a_m + \frac{1}{c_1(c_1+1)...c_m(c_m+1)}\right].$$

3. Довжина циліндра виражається формулою:

$$\left|\Delta^L_{c_1...c_m}\right| = \frac{1}{c_1(c_1+1)...c_m(c_m+1)} = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{c_i(c_i+1)}.$$

Остання рівність є наслідком попередньої властивості.

Наслідок 5. *Довільна перестановка символів в основі циліндра не змінює його довжину.*

7. Основне метричне відношення

Лема 4. *Для відношення вкладених циліндрів виконується рівність:*

$$\frac{\left|\Delta^L_{c_1\dots c_m i}\right|}{\left|\Delta^L_{c_1\dots c_m}\right|}=\frac{1}{i(i+1)}\qquad\Leftrightarrow\qquad\left|\Delta^L_{c_1\dots c_m i}\right|=\frac{1}{i(i+1)}\left|\Delta^L_{c_1\dots c_m}\right|.$$

Наслідок 6. *Мають місце оцінки:*

$$\frac{1}{(i+1)^2}<\frac{\left|\Delta^L_{c_1\dots c_m i}\right|}{\left|\Delta^L_{c_1\dots c_m}\right|}<\frac{1}{i^2}$$

Наслідок 7. *Має місце наступна оцінка:*

$$\left|\Delta^L_{c_1\dots c_m i}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left|\Delta^L_{c_1\dots c_m}\right|,$$

Причому рівність має місце тоді і тільки тоді, коли $i=1$.

Зауваження. Для циліндрів, що відповідають зображенню чисел елементарними ланцюговими дробами [**4**] основне метричне відношення має вигляд:

$$\frac{|\nabla_{c_1\dots c_m i}|}{|\nabla_{c_1\dots c_m}|}=\frac{1}{i^2}\cdot\frac{1+\frac{q_m-1}{q_m}}{\left(1+\frac{q_m-1}{i\cdot q_m}\right)\left(1+\frac{1}{i}+\frac{q_m-1}{i\cdot q_m}\right)},$$

де q_m — це знаменник підхідного дробу n-го порядку, а його оцінки:

$$\frac{1}{3i^2}<\frac{|\nabla_{c_1\dots c_m i}|}{|\nabla_{c_1\dots c_m}|}<\frac{2}{i^2},$$

звідки прослідковується деяка схожість метричних теорій.

8. Найпростіші метричні задачі

Лема 5. *Міра Лебега множини чисел Δ^k_i, які в L-зображенні на k-му місці мають цифру i, дорівнює $\dfrac{1}{i(i+1)}$.*

Доведення. $\lambda\left(\Delta^k_i\right)=\sum\limits_{i_1=1}^{\infty}\dots\sum\limits_{i_{k-1}=1}^{\infty}\left|\Delta_{i_1\dots i_{k-1}i}\right|=\frac{1}{i(i+1)}\sum\limits_{i_1=1}^{\infty}\dots\sum\limits_{i_{k-1}=1}^{\infty}\left|\Delta_{i_1\dots i_{k-1}}\right|=\frac{1}{i(i+1)}\cdot 1=\frac{1}{i(i+1)}$. □

Наслідок 8. *Міра Лебега множини $\Delta^{k_1}_{\overline{c_1}}$, яка в L-зображенні на k_1-му місці має цифри, відмінні від цифри c_1, обчислюється за формулою: $\lambda\left(\Delta^{k_1}_{\overline{c_1}}\right)=1-\frac{1}{c_1(c_1+1)}$.*

Справді, оскільки $\Delta^{k_1}_{\overline{c_1}}=(0,1]\setminus\Delta^{k_1}_{c_1}$, то

$$\lambda\left(\Delta^{k_1}_{\overline{c_1}}\right)=1-\lambda\left(\Delta^{k_1}_{c_1}\right)=1-\frac{1}{c_1(c_1+1)}.$$

Лема 6. *Нехай маємо два набори натуральних чисел* $(c_1, c_2, ..., c_m), (k_1, k_2, ..., k_m), k_1 < k_2 < ... < k_m$. *Мірою Лебега множини чисел, які на* k_1 *місці мають цифру* c_1, k_2 *місці мають цифру* c_2 *і т.д., на* k_m *місці – цифру* c_m, *обчислюється за формулою:*

$$\lambda\left(\Delta^{k_1...k_m}_{c_1...c_m}\right) = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{c_i(c_i+1)}.$$

Доведення. Використовуючи основне матричне відношення (лема 4) і лему 5, маємо

$$\lambda\left(\Delta^{k_1...k_m}_{c_1...c_m}\right) = \tfrac{1}{c_m(c_m+1)}\left|\Delta^{k_1...k_{m-1}}_{c_1...c_{m-1}}\right| = \tfrac{1}{c_m(c_m+1)}\cdot\tfrac{1}{c_{m-1}(c_{m-1}+1)}\left|\Delta^{k_1...k_{m-2}}_{c_1...c_{m-2}}\right| = ...$$
$$... = \tfrac{1}{c_m(c_m+1)}\cdot\tfrac{1}{c_{m-1}(c_{m-1}+1)}\cdot ... \cdot\tfrac{1}{c_1(c_1+1)},$$

що й вимагалося довести. □

Наслідок 9. *Циліндри* L*-зображення є метрично незалежними, а саме:*

$$\lambda\left(\Delta^{k_1...k_n...k_m}_{c_1...c_n...c_m}\right) = \lambda\left(\Delta^{k_1...k_n}_{c_1...c_n}\right)\cdot\lambda\left(\Delta^{k_{n+1}...k_m}_{c_{n+1}...c_m}\right)$$

9. Множина чисел з обмеженими L-символами

Теорема 6. *Множина всіх чисел півінтервала* $(0, 1]$ *з обмеженими елементами* L*-зображення має нульову міру Лебега.*

Доведення. Позначимо через E_M множину чисел відрізка $[0, 1]$, всі L -символи яких менші за M. Нехай $\Delta_{c_1c_2...c_n}$ — довільний циліндр рангу n, такий, що

$$c_k < M,\ k = \overline{1, n}. \tag{7}$$

Точки x цього циліндра, які задовольняють додаткову умову $c_{n+1}(x) = k$, утворюють інтервал $\nabla_{c_1c_2...c_nk}$ рангу $n+1$. В силу наслідка 6 $\left|\Delta^L_{c_1...c_nk}\right| > \dfrac{1}{(k+1)^2}\left|\Delta^L_{c_1...c_n}\right|$, звідки

$$\lambda\left(\bigcup_{k\geqslant M}\Delta^L_{c_1...c_nk}\right) > \left|\Delta^L_{c_1...c_n}\right|\sum_{k\geqslant M}\frac{1}{(k+1)^2} = \left|\Delta^L_{c_1...c_n}\right|\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(M+i)^2} >$$
$$> \left|\Delta^L_{c_1...c_n}\right|\int\limits_{M+1}^{\infty}\frac{du}{u^2} = \frac{1}{(M+1)}\left|\Delta^L_{c_1...c_n}\right|.$$

Оскільки $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\Delta^L_{c_1...c_nk} = \Delta^L_{c_1...c_n}$, то

$$\bigcup_{k<M}\left|\Delta^L_{c_1...c_nk}\right| < \left[1 - \frac{1}{(M+1)}\right]\left|\Delta^L_{c_1...c_n}\right| = \tau\left|\Delta^L_{c_1...c_n}\right|, \tag{8}$$

де $\tau = 1 - \dfrac{1}{(M+1)}$.

Позначивши через $E_M^{(n)}$ множину чисел відрізка $[0,1]$, які задовольняють умові (7), з нерівності (8) бачимо, що частина множини $E_M^{(n+1)}$, яка міститься в деякому циліндрі $\Delta^L_{c_1c_2\ldots c_n}$ рангу n, має міру меншу, ніж $\tau\left|\Delta^L_{c_1\ldots c_n}\right|$. Сумуючи нерівність (7) по всім циліндрам рангу n, які входять в множину $E_M^{(n)}$, отримаємо: $\lambda\left(E_M^{(n+1)}\right)<\tau\lambda\left(E_M^{(n)}\right)$. Послідовне застосування цієї нерівності, очевидно, дає $\lambda\left(E_M^{(n+1)}\right) < \tau^n\lambda\left(E_M^{(1)}\right)$ $(n\geqslant 1)$, звідки $\lambda\left(E_M^{(n)}\right)\to 0$ $(n\to\infty)$, оскільки $\tau<1$. Але визначена нами вище множина E_M, очевидно, міститься в кожній з множин $E_M^{(n)}$, внаслідок чого $\lambda\left(E_M\right)=0$.

Покладаючи тепер $\bigcup\limits_{M=1}^{\infty}E_M=E$, отримаємо $\lambda(E)\leqslant\sum\limits_{M=1}^{\infty}\lambda\left(E_M\right)=0$. Але кожне число з обмеженими елементами належить, очевидно, множині E_M при достатньо великому M, а значить, належить множині E. $\square$

Література

[1] *Барановський О.М., Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Тополого-метричні властивості множин дійсних чисел з умовами на їх розклади в ряди Остроградського // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, №9. – С. 1155–1168.

[2] *Працьовита І.М.* Ряди Остроградського 2-го виду і розподіли їх випадкових неповних сум // Наук. часоп. НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. – 2006. – №7. – С. 174–189.

[3] *Працьовитий М.В., Гетьман Б.І.* Ряди Енгеля та їх застосування // Наук. часоп. НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. – 2006. – №7. – С. 105–116.

[4] *Працьовитий М.В., Лещинський О.Л.* Фрактальні властивості розподілів випадкових величин, заданих розподілами елементів свого ланцюгового зображення // Фрактальний аналіз та суміжні питання. – Київ: ІМ НАН Україїни – НПУ ім.. М.П. Драгоманова. – 1998. – №1. – С.73–75.

[5] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ ім. М.П. Драгоманова, 1998. – 296 с.

[6] *Barrionuevo J., Burton R., Dajani K., Kraaikamp C.* Ergodic properties of generalized Lüroth series // Acta Arith. – 1996. – №4 – P. 311–327.

[7] *Dajani K., Kraaikamp C.* On approximation by Lüroth series // J. Théor. Nombres Bordeaux. – 1996. – **8**, №2. – P. 331–346.

[8] *Galambos J.* Some remarks on the Lüroth expansion // Czechoslovak Math. J. – 1972. – **22**, №2. – P. 266–271.

[9] *Ganatsiou C.* On some properties of the Lüroth-type alternating series representations for real numbers // Int. J. Math. Math. Sci. – 2001. – **28**, №6. – P. 367–373.

[10] *Kalpazidou S., Knopfmacher A., Knopfmacher J.* Metric properties of alternating Lüroth series // Portugal. Math. – 1991. – **48**, №3. – P. 319–325.

[11] *Lüroth J.* Uber eine eindeutige Entwickelung von Zahlen in eine unendliche Reihe // Math. Ann. – 1883. – **21**. – P. 411–423.

[12] *Šalát T.* Zur metrischen Theorie der Lürothschen Entwicklungen der reellen Zahlen // Czechoslovak Math. J. 1968. – **18**, №3. – P. 489–522.

[13] *Sylvester J.J.* On a point in the theory of vulgar fractions // Amer. J. Math. – 1880. – **3**, №4. – P.332–335. – Postscript, ibid 388–389.