Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2008, № 9. — С. 112–120.

УДК 512.53

Основи аналізу функцій тернарної змінної

Л. А. Вотякова
(Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського)

Анотація. В роботі побудовано основи аналізу функцій тернарної змінної: введено (за Вейєрштрассом) поняття аналітичної функції, зокрема означено основні аналітичні функції.

Abstract. In this paper built foundation of analysis functions of ternary variable: on the algebra of ternary numbers the norm is introduced, the concept of analytic functions as the sum of power series are developed, the fragment of theory of elementary functions built.

1. Вступ

Ми виходимо з того факту, що [**1**, с. 401] «кожна алгебра скінченного рангу над полем K допускає мономорфне вкладення в підходящу повну матричну алгебру над тим же полем». Однак пішли, до певної міри, зворотним шляхом. Якраз певні підалгебри повної матричної алгебри квадратних матриць були відправним пунктом при побудові алгебри бінарних [**2**] і дуальних чисел [**3**]. Як результат, побудовано основи аналізу функцій бінарної та дуальної змінної.

В даній роботі відправним пунктом слугує підалгебра циклічних матриць алгебри матриць порядку 3 над полем $\mathbb{R}$. Якраз вона є матричним поданням побудованої алгебри тернарних чисел (загальні рекомендації щодо побудови подібних алгебр можна знайти в [**4**, с. 21–24]), що дозволяє скористатись елементами матричного аналізу [**5**, с. 340–350] для наділення її топологічною структурою. Канонічна форма лінійного оператора [**6**, с. 58–61], перенесена на тернарне число, виявилась ефективним засобом при сумуванні степеневих рядів з дійсними коефіцієнтами, а отже, при виділенні класу аналітичних функцій.

2. Алгебра тернарних чисел, її матричне подання

Нехай маємо множину $\mathbf{T} = \{x_0\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 \colon x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, яка наділена структурою лінійного простору над полем $\mathbb{R}$ в стандартний спосіб. Наділимо множину $\mathbf{T}$ операцією множення за правилом: для будь-яких $t_1 = x_0\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$, $t_2 = y_0\mathbf{e}_0 + y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2$:

$$t_1 \cdot t_2 := (x_0y_0 + x_1y_2 + x_2y_1)\mathbf{e}_0 + (x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_2)\mathbf{e}_1 + (x_0y_2 + x_1y_1 + x_2y_0)\mathbf{e}_2, \quad (1)$$

тобто множення елементів множини $\mathbf{T}$ виконується за правилом множення многочленів з врахуванням таблиці множення виділених елементів, а саме:

$$\begin{array}{c|ccc} & \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \\ \hline \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_1 \end{array} \quad (2)$$

Неважко переконатись, що $\mathbf{T}$ є комутативною алгеброю рангу 3 над полем $\mathbb{R}$, одиницею якої слугує елемент $1 \cdot \mathbf{e}_0 + 0 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2$. Множення на елементи вигляду $x\mathbf{e}_0$ еквівалентне множенню на дійсне число x. Алгебру $\mathbf{T}$ будемо називати *алгеброю тернарних чисел*, а її елементи — *тернарними числами.*

Підмножини $I_1 = \{x_0\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1 - (x_0 + x_1)\mathbf{e}_2 \colon x_0, x_1 \in \mathbb{R}\}$, $I_2 = \{x_0(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \colon x_0 \in \mathbb{R}\}$ нетривіальні ідеали алгебри $\mathbf{T}$, причому $t_1t_2 = 0$, якщо $t_1 \in I_1$, $t_2 \in I_2$.

Нехай M_3^C — множина всіх циклічних матриць порядку 3 з дійсними елементами. Неважко переконатись, що M_3^C комутативна алгебра рангу 3 над полем $\mathbb{R}$, причому алгебри $\mathbf{T}$ і M_3^C ізоморфні. Отож алгебра $\mathbf{T}$ допускає мономорфне вкладення у повну матричну алгебру M_3, тобто кожне тернарне число має матричне подання

$$t = x_0\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 \qquad \mapsto \qquad T = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Наділимо тернарні числа матричними характеристиками. Насамперед визначник матриці (3) вважаємо алгебраїчною нормою t, тобто

$$\mathbb{N}_r(t) := \det T = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 - 3x_0x_1x_2, \quad (4)$$

а тернарне число

$$\bar{t} = (x_0^2 - x_1x_2)\mathbf{e}_0 + (-x_0x_1 + x_2^2)\mathbf{e}_1 + (-x_0x_2 + x_1^2)\mathbf{e}_2 \quad (5)$$

назвемо *спряженим* до t ($t \cdot \bar{t} = \mathbb{N}_r(t)\mathbf{e}_0$), якщо t не належить I_1 або I_2.

Якщо $\mathbb{N}_r(t) \neq 0$, то за означенням для будь-якого $t_1 \in \mathbf{T}$:

$$\frac{t_1}{t} := \frac{1}{\mathbb{N}_r(t)} t_1 \bar{t}. \tag{6}$$

Якщо ж $t \in I_1$, $t = k(x_0\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1 - (x_0 + x_1)\mathbf{e}_2)$, $(k \neq 0)$ і $t_1 = l(x_0\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1 - (x_0 + x_1)\mathbf{e}_2)$ або $t \in I_2$, $t = k(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$ і $t_1 = l(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$, то

$$\frac{t_1}{t} := \frac{l}{k}\mathbf{e}_0. \tag{7}$$

Нехай матриця (3) є поданням тернарного числа $t = x_0\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$, і $\lambda_0 = x_0 + x_1 + x_2$, $\lambda_1 = x_0 + \tau_1 x_1 + \tau_2 x_2$, $\lambda_2 = x_0 + \tau_2 x_1 + \tau_1 x_2$, де

$$\tau_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad \tau_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

власні значення матриці T.

Теорема 1. *Для тернарного числа t має місце подання*

$$t = \frac{1}{3}\left(\lambda_0(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + \lambda_1(\mathbf{e}_0 + \tau_2\mathbf{e}_1 + \tau_1\mathbf{e}_2) + \lambda_2(\mathbf{e}_0 + \tau_1\mathbf{e}_1 + \tau_2\mathbf{e}_2)\right) \tag{8}$$

Доведення. Скориставшись технікою Като [**6**, с. 56], побудуємо власні проектори матриці T, що відповідають власним значенням λ_0, λ_1, λ_2, а саме обчислимо інтеграл

$$\Pi_{\lambda_k} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{\lambda_k}} R_T(\lambda) d\lambda,$$

де $R_T(\lambda)$ — резольвента матриці T, C_{λ_k} — коло з центром у власному значенні λ_k, поза яким лежать всі інші власні значення. Дістанемо:

$$\Pi_{\lambda_0} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Pi_{\lambda_1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \tau_2 & \tau_1 \\ \tau_1 & 1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Pi_{\lambda_2} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & 1 & \tau_1 \\ \tau_1 & \tau_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отож для матриці T має місце подання

$$T = \lambda_0\Pi_{\lambda_0} + \lambda_1\Pi_{\lambda_1} + \lambda_2\Pi_{\lambda_2}.$$

Остання матриця і є поданням тернарного числа (8).

Як наслідок маємо:

$$t^n = \frac{1}{3}\left(\lambda_0^n(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + \lambda_1^n(\mathbf{e}_0 + \tau_2\mathbf{e}_1 + \tau_1\mathbf{e}_2) + \lambda_2^n(\mathbf{e}_0 + \tau_1\mathbf{e}_1 + \tau_2\mathbf{e}_2)\right) \tag{9}$$

$\square$

3. Нормування алгебри T, її повнота

Наділимо алгебру $\mathbf{T}$ топологічною нормою, а саме:

$$t := \sqrt{3}\left(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

Неважко перевірити, що так означена функція задовольняє аксіоми норми. Більше того, для будь-яких $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ виконується нерівність $t_1 t_2 \leqslant t_1 t_2$, а також правило паралелограма $t_1 + t_2{}^2 + t_1 - t_2{}^2 = 2\left(t_1^2 + t_2{}^2\right).$

В стандартний спосіб означається границя послідовності тернарних чисел $(t_n) = (x_{0,n}\mathbf{e}_0 + x_{1,n}\mathbf{e}_1 + x_{2,n}\mathbf{e}_2)$. А оскільки ця послідовність породжує три послідовності дійсних чисел $(x_{0,n})$, $(x_{1,n})$, $(x_{2,n})$, то неважко переконатись, що має місце такий критерій.

Теорема 2. *Послідовність (t_n) збігається тоді і лише тоді, коли збігаються послідовності $(x_{0,n})$, $(x_{1,n})$, $(x_{2,n})$, причому*

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} x_{0,n}\mathbf{e}_0 + \lim_{n\to\infty} x_{1,n}\mathbf{e}_1 + \lim_{n\to\infty} x_{2,n}\mathbf{e}_2. \tag{11}$$

Як приклад знайдемо:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\mathbf{e}_0 + \frac{1}{n}t\right)^n,$$

де $t \in \mathbf{T}$. Оскільки на підставі (7) та (8)

$$\left(\mathbf{e}_0 + \frac{1}{n}t\right)^n = \left(\left(1 + \frac{x_0}{n}\right)\mathbf{e}_0 + \frac{x_1}{n}\mathbf{e}_1 + \frac{x_2}{n}\mathbf{e}_2\right)^n =$$
$$= \frac{1}{3}\left(\nu_0^n + \nu_1^n + \nu_2^n\right)\mathbf{e}_0 + \frac{1}{3}\left(\nu_0^n + \tau_2\nu_1^n + \tau_1\nu_2^n\right)\mathbf{e}_1 + \frac{1}{3}\left(\nu_0^n + \tau_1\nu_1^n + \tau_2\nu_2^n\right)\mathbf{e}_2,$$

де

$$\nu_0 = 1 + \frac{x_0 + x_1 + x_2}{n}, \quad \nu_1 = 1 + \frac{x_0 + \tau_1 x_1 + \tau_2 x_2}{n}, \quad \nu_2 = 1 + \frac{x_0 + \tau_2 x_1 + \tau_1 x_2}{n}$$

і

$$\lim_{n\to\infty}\left(\nu_0^n + \nu_1^n + \nu_2^n\right) = e^{x_0+x_1+x_2} + e^{x_0+\tau_1 x_1+\tau_2 x_2} + e^{x_0+\tau_2 x_1+\tau_1 x_2} =$$
$$= e^{x_0}\left(e^{x_1+x_2} + e^{\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2}\left(e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1-x_2)i} + e^{\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1-x_2)i}\right)\right) =$$
$$= e^{x_0}\left(e^{x_1+x_2} + 2e^{-\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 - x_2)\right) = u_0(x_0, x_1, x_2),$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\nu_0^n + \tau_2\nu_1^n + \tau_1\nu_2^n\right) =$$
$$= e^{x_0}\left(e^{x_1+x_2} + e^{-\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2}\left(-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 - x_2) + \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 - x_2)\right)\right) = u_1(x_0, x_1, x_2),$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\nu_0^n+\tau_1\nu_1^n+\tau_2\nu_2^n\right)=$$

$$=e^{x_0}\left(e^{x_1+x_2}+e^{-\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2}\left(-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1-x_2)-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1-x_2)\right)\right)=u_2(x_0,x_1,x_2),$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\mathbf{e}_0+\frac{1}{n}t\right)^n=\frac{1}{3}\left(u_0(x_0,x_1,x_2)\mathbf{e}_0+u_1(x_0,x_1,x_2)\mathbf{e}_1+u_2(x_0,x_1,x_2)\mathbf{e}_2\right).$$

В алгебрі $\mathbf{T}$ має місце критерій Коші, тобто вона є повною. Норма $\mathbf{T}$ породжується скалярним добутком

$$(t_1,t_2)=3(x_0y_0+x_1y_1+x_2y_2) \tag{12}$$

Таким чином, алгебра $\mathbf{T}$ — евклідів простір.

4. Степеневі тернарні ряди з дійсними коефіцієнтами

Символ виду

$$\sum_{n=1}^{\infty}t_n \tag{13}$$

будемо називати рядом з тернарними членами. Очевидно, що ряд (13) породжує три ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_{0,n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}x_{1,n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}x_{2,n}, \tag{14}$$

з дійсними членами, причому в силу теореми 1 ряд (13) збігається тоді і лише тоді , коли збігаються ряди (14). Більше того, для збіжного ряду (13)

$$\sum_{n=1}^{\infty}t_n=\sum_{n=1}^{\infty}x_{0,n}\mathbf{e}_0+\sum_{n=1}^{\infty}x_{1,n}\mathbf{e}_1+\sum_{n=1}^{\infty}x_{2,n}\mathbf{e}_2. \tag{15}$$

Для прикладу розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}t^n,$$

де $t^0:=\mathbf{e}_0$. Скориставшись формулою (9), подамо заданий ряд у вигляді

$$\sum_{n=0}^{\infty}t^n=\mathbf{e}_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\left(\lambda_0^n+\lambda_1^n+\lambda_2^n\right)\mathbf{e}_0+\frac{1}{3}\left(\lambda_0^n+\tau_2\lambda_1^n+\tau_1\lambda_2^n\right)\mathbf{e}_1+\frac{1}{3}\left(\lambda_0^n+\tau_1\lambda_1^n+\tau_2\lambda_2^n\right)\mathbf{e}_2\right).$$

Нехай $|\lambda_0|<1$, $|\lambda_1|<1$, $|\lambda_2|<1$. Тоді, скориставшись тим, що $1+\tau_1+\tau_2=0$, подамо ряд у вигляді

$$\frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_0^n+\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_1^n+\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_2^n\right)\mathbf{e}_0+\frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_0^n+\tau_2\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_1^n+\tau_1\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_2^n\right)\mathbf{e}_1+$$

$$+\frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_0^n+\tau_1\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_1^n+\tau_2\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_2^n\right)\mathbf{e}_2=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\lambda_0}+\frac{1}{1-\lambda_1}+\frac{1}{1-\lambda_2}\right)\mathbf{e}_0+$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\lambda_0}+\frac{\tau_2}{1-\lambda_1}+\frac{\tau_1}{1-\lambda_2}\right)\mathbf{e}_1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\lambda_0}+\frac{\tau_1}{1-\lambda_1}+\frac{\tau_2}{1-\lambda_2}\right)\mathbf{e}_2.$$

Можна показати, що за вказаних умов

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{\mathbf{e}_0}{\mathbf{e}_0 - t}.$$

Назвемо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

де $t^0 := \mathbf{e}_0$, $a_n \in \mathbb{R}$, *степеневим тернарним рядом з дійсними коефіцієнтами.*

Теорема 3. *Якщо степеневий ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{16}$$

збігається на інтервалі $(-r, r)$, *то степеневий тернарний ряд з дійсними коефіцієнтами*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \tag{17}$$

збігається для всіх тих t, *для яких* $|\mathbb{N}_r(t)| < r^3$, *причому сума ряду* (17) *дорівнює*

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{3}\left(S(\lambda_0)+S(\lambda_1)+S(\lambda_2)\right)\mathbf{e}_0+\frac{1}{3}\left(S(\lambda_0)+\tau_2 S(\lambda_1)+\tau_1 S(\lambda_2)\right)\mathbf{e}_1+ \\ &+\frac{1}{3}\left(S(\lambda_0)+\tau_1 S(\lambda_1)+\tau_2 S(\lambda_2)\right)\mathbf{e}_2 \end{aligned} \tag{18}$$

Доведення. Оскільки n-ту часткову суму ряду (17) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k = a_0\mathbf{e}_0 + \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3}\left(\lambda_0^k+\lambda_1^k+\lambda_2^k\right)\mathbf{e}_0+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3}\left(\lambda_0^k+\tau_2\lambda_1^k+\tau_1\lambda_2^k\right)\mathbf{e}_1+ \\ +\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3}\left(\lambda_0^k+\tau_1\lambda_1^k+\tau_2\lambda_2^k\right)\mathbf{e}_2, \end{aligned}$$

то послідовність таких часткових сум збігається тоді і тільки тоді, коли будуть збіжними послідовності

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\lambda_0^k\right),\quad \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\lambda_1^k\right),\quad \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\lambda_2^k\right).$$

А це має місце, коли

$$|\lambda_0| = |x_0+x_1+x_2| < r,\quad |\lambda_1| = |x_0+\tau_2 x_1+\tau_1 x_2| < r,\quad |\lambda_2| = |x_0+\tau_1 x_1+\tau_2 x_2| < r,$$

або $\mathbb{N}_r(t) < r^3$. Якщо ж $S_n(t)$ подати у вигляді

$$\frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\lambda_0^k+\sum_{k=0}^{n} a_k\lambda_1^k+\sum_{k=0}^{n} a_k\lambda_2^k\right)\mathbf{e}_0+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\lambda_0^k+\tau_2\sum_{k=0}^{n} a_k\lambda_1^k+\tau_1\sum_{k=0}^{n} a_k\lambda_2^k\right)\mathbf{e}_1+$$
$$+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\lambda_0^k+\tau_1\sum_{k=0}^{n} a_k\lambda_1^k+\tau_2\sum_{k=0}^{n} a_k\lambda_2^k\right)\mathbf{e}_2,$$

то рівність (18) стає очевидною. □

Доведена теорема дає можливість будувати функції, для яких має місце алгебраїчне подання $f(t)=f_0(x_0,x_1,x_2)\mathbf{e}_0+f_1(x_0,x_1,x_2)\mathbf{e}_1+f_2(x_0,x_1,x_2)\mathbf{e}_2$. Для основних елементарних функцій маємо:

$$e^t=\frac{1}{3}e^{x_0}\left(e^{x_1+x_2}+2e^{-\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1-x_2)\right)\mathbf{e}_0+$$
$$+\frac{1}{3}e^{x_0}\left(e^{x_1+x_2}-e^{-\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1-x_2)-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1-x_2)\right)\right)\mathbf{e}_1+$$
$$+\frac{1}{3}e^{x_0}\left(e^{x_1+x_2}-e^{-\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1-x_2)+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1-x_2)\right)\right)\mathbf{e}_2,$$

для $t_1,t_2\in\mathbf{T}$, $e^{t_1+t_2}=e^{t_1}e^{t_2}$;

$$\sin t=\frac{1}{3}\left(\sin(x_0+x_1+x_2)+2\sin\left(x_0-\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}\right)\operatorname{ch}\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1-x_2)\right)\mathbf{e}_0+$$
$$+\frac{1}{3}\left(\sin(x_0+x_1+x_2)-\sin\left(x_0-\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}\right)\operatorname{ch}\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1-x_2)+\right.$$
$$\left.+\sqrt{3}\cos\left(x_0-\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}\right)\operatorname{sh}\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1-x_2)\right)\mathbf{e}_1+$$
$$+\frac{1}{3}\left(\sin(x_0+x_1+x_2)-\sin\left(x_0-\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}\right)\operatorname{ch}\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1-x_2)-\right.$$
$$\left.-\sqrt{3}\cos\left(x_0-\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}\right)\operatorname{sh}\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1-x_2)\right)\mathbf{e}_2,$$

$$\cos t=\frac{1}{3}\left(\cos(x_0+x_1+x_2)+2\cos\left(x_0-\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}\right)\operatorname{ch}\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1-x_2)\right)\mathbf{e}_0+$$
$$+\frac{1}{3}\left(\cos(x_0+x_1+x_2)-\cos\left(x_0-\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}\right)\operatorname{ch}\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1-x_2)-\right.$$
$$\left.-\sqrt{3}\sin\left(x_0-\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}\right)\operatorname{sh}\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1-x_2)\right)\mathbf{e}_1+$$

$$+\frac{1}{3}\bigg(\cos(x_0+x_1+x_2)-\cos\Big(x_0-\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}\Big)\operatorname{ch}\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1-x_2)+$$

$$+\sqrt{3}\sin\Big(x_0-\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}\Big)\operatorname{sh}\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1-x_2)\bigg)\mathbf{e}_2,$$

для $t\in\mathbf{T}$, $\cos^2 t+\sin^2 t=\mathbf{e}_0$;

$$\ln(\mathbf{e}_0+t)=\frac{1}{3}\ln\mathbb{N}_r(\mathbf{e}_0+t)\mathbf{e}_0+\frac{1}{3}\left(\ln\frac{1+\lambda_0}{|1+\lambda_1|}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}(x_1-x_2)}{2(1+x_0)-x_1-x_2}\right)\mathbf{e}_1+$$

$$+\frac{1}{3}\left(\ln\frac{1+\lambda_0}{|1+\lambda_2|}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}(x_1-x_2)}{2(1+x_0)-x_1-x_2}\right)\mathbf{e}_2,$$

для тих t, для яких $|\mathbb{N}_r(t)|<1$,

$$\ln(\mathbf{e}_0+t_1)+\ln(\mathbf{e}_0+t_2)=\ln(\mathbf{e}_0+t_1)(\mathbf{e}_0+t_2).$$

5. Похідна функції тернарної змінної

Нехай функція $w=f(t)$ тернарної змінної визначена в деякому околі тернарного числа t_0, і нехай і цьому околі, за винятком точки t_0, визначена функція

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}.$$

Якщо існує

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0},\tag{19}$$

то її назвемо *похідною* функції $f(t)$ у точці t_0 і позначатимемо $f'(t_0)$.

Нехай $f(t)=t^n$ $(n\geqslant 1)$ і точка $t_0=x_0^0\mathbf{e}_0+x_1^0\mathbf{e}_1+x_2^0\mathbf{e}_2$. Позначимо

$$\Delta t=\Delta x_0^0\mathbf{e}_0+\Delta x_1^0\mathbf{e}_1+\Delta x_2^0\mathbf{e}_2=(x_0-x_0^0)\mathbf{e}_0+(x_1-x_1^0)\mathbf{e}_1+(x_2-x_2^0)\mathbf{e}_2.$$

Нехай $\Delta t\notin I_1\bigcup I_2$. Тоді

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=\frac{(t_0+\Delta t)^n-t_0^n}{\Delta t}=\frac{\mathbf{e}_0}{\Delta t}\sum_{k=1}^{n}C_n^k t_0^{n-k}(\Delta t)^k=$$

$$=\frac{1}{\mathbb{N}_r\Delta t}\sum_{k=1}^{n}C_n^k t_0^{n-k}\mathbb{N}_r(\Delta t)(\Delta t)^{k-1}.$$

А тому

$$\lim_{t\to t_0}\frac{t^n-t_0^n}{t-t_0}=n\cdot t_0^{n-1}.$$

Якщо ж $\Delta t\in I_1$ або I_2, то за домовленістю (7)

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}C_n^k t_0^{n-k}(\Delta t)^{k-1}\cdot\Delta t}{\Delta t}:=\sum_{k=1}^{n}C_n^k t_0^{n-k}(\Delta t)^{k-1},$$

а, отже, і у цьому випадку

$$\lim_{t\to t_0}\frac{t^n-t_0^n}{t-t_0}=n\cdot t_0^{n-1}.$$

Таким чином,

$$(t^n)'=nt^{n-1}. \tag{20}$$

Якщо для функції $f(t)=u(x_0,x_1,x_2)\mathbf{e}_0+v(x_0,x_1,x_2)\mathbf{e}_1+w(x_0,x_1,x_2)\mathbf{e}_2$ ввести позначення:

$$\frac{\partial f(t)}{\partial x_0}=u'_{x_0}(x_0,x_1,x_2)\mathbf{e}_0+v'x_0(x_0,x_1,x_2)\mathbf{e}_1+w'_{x_0}(x_0,x_1,x_2)\mathbf{e}_2,$$

то

$$(t^n)'=\frac{\partial}{\partial x_0}t^n. \tag{21}$$

Більше того, має місце теорема.

Теорема 4. *Якщо функція $S(t)$ є сумою степеневого тернарного ряду з дійсними коефіцієнтами, то сума ряду, отриманого із заданого почленним диференціюванням, рівняється*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nnt^{n-1}=\frac{\partial}{\partial x_0}(S(t)). \tag{22}$$

Цей факт безпосередньо випливає із (18) і можливості почленного диференціювання звичайних степеневих рядів.

Як приклад, $(e^t)'=e^t$, $(\sin t)'=\cos t$, $(\cos t)'=-\sin t$, $(\ln(\mathbf{e}_0+t))'=\dfrac{\mathbf{e}_0}{\mathbf{e}_0+t}$.

Функції вигляду (18) можна в цьому сенсі диференціювати скільки завгодно раз, а тому природно їх назвати аналітичними.

Література

[1] *Калужнин Л. А.* Введение в общую алгебру.— М.: Наука, 1973.— 447 с.

[2] *Працьовитий М. В., Вотякова Л. А.* Аналіз на алгебрі двічі стохастичних матриць // Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.— 2005, № 6.— С. 282–300.

[3] *Вотякова Л. А.* Основи аналізу функцій дуальної змінної // Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2006, № 7.— С. 61–71.

[4] *Пирс Р.* Ассоциативные алгебры: Пер. с англ.— М.: Мир, 1986.— 518 с.

[5] *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ: Пер. с англ. — М.: Мир, 1989.— 655 с.

[6] *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов: Пер. с англ.— М.: Мир, 1972.— 740 с.