Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова.— 2013, № 15.— С. 156–167.

УДК 511.72 + 517.51

Інверсор цифр Q_3-зображення дробової частини дійсного числа як розв'язок системи трьох функціональних рівнянь

М. В. Працьовитий, І. В. Замрій
(Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова)

Анотація. Основним обєктом дослідження є одна монотонно спадна, залежна від двох параметрів q_0 і q_1 ($0 < q_i < 1$, $q_0 + q_1 < 1$), неперервна на відрізку $[0,1]$ функція (названа інверсором цифр Q_3 – зображення дробової частини дійсного числа), яка означується в термінах Q_3 – зображення дійсних чисел і належить до континуальної двопараметричної сім'ї неперервних монотонних або ніде не монотонних функцій. Її значення отримується з зображення аргумента заміною цифр: 0 на 2 та 2 на 0.

Вказано систему трьох функціональних рівнянь, єдиним розв'язком якої в класі визначених та обмежених на $[0,1]$ функцій є інверсор цифр Q_3 – зображення дробової частини дійсного числа.

Ключові слова: Q_3-зображення числа, інверсор цифр, сингулярна функція, міра Лебега, система функціональних рівнянь, дробова частина дійсного числа.

Abstract. The main object of study is a monotonically decreasing, depending on two parameters q_0 and q_1 ($0 < q_i < 1$, $q_0 + q_1 < 1$), continuous on $[0,1]$ function. It is called inversor of digits of Q_3-representation of fractional part of a real number and defined in terms of Q_3-representation of real numbers. This function belongs to the two-parameter continuum family of continuous monotonic or nowhere monotonic functions. Its value is obtained from representation of argument by change of digits: 0 to 2 and 2 to 0.

We specify system of three functional equations such that this inversor is a unique solution of this system in the class of functions defined and bounded on $[0,1]$.

Keywords: Q_3-representation of number, inversor of digits, singular function, Lebesgue measure, system in the class of functions defined, fractional part of a real number.

Вступ

Сингулярні функції (неперервні функції, відмінні від константи, похідна яких майже скрізь у розумінні міри Лебега дорівнює нулю) тривалий час вважались екзотичними і їм приділялось недостатня увага дослідників. Хоча сингулярна компонента є однією з трьох «рівноправних» складових у лінійній комбінації розкладу Лебега довільної функції обмеженої варіації $f = \alpha_1 f_d + \alpha_2 f_{ac} + \alpha_3 f_s$ ($\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$), де f_d – дискретна, f_{ac} – абсолютно неперервна та f_s – сингулярна функції.

Інтерес до сингулярних функцій виник у теорії ймовірностей, де вони виступали в якості функцій розподілу випадкових величин зі складною локальною структурою, тобто в класі монотонних функцій. Окремий інтерес викликали сингулярні строго зростаючі функції (про які йдеться у роботах [10, 11, 9]), а не лише функції канторівського типу. Крім того, інтерес до таких функцій значно зріс після доведення у 1981 році теореми Замфіреску [12], яка стверджує, що сингулярні функції в метричному просторі всіх неперервних монотонних функцій з супремум-метрикою утворюють множину другої категорії Бера (не є множиною, яка є об'єднанням не більш ніж зліченної кількості ніде не щільних множин). Ще одним, але дуже важливим рушієм інтересу стало доведення того, що сингулярні функції розподілу випадкових величин є домінуючими у класах випадкових величин, символи яких у тому чи іншому зображенні є незалежними [1].

В останні роки з'являється все більше публікацій, пов'язаних з сингулярними функціями [1, 3, 5, 8]. Але існують деякі труднощі розвитку загальної та індивідуальної теорії сингулярних функцій, вони насамперед пов'язані з відсутністю ефективного апарату для їх задання та дослідження. Останнім часом для цього використовують різні системи зображення дійсних чисел і теорію рядів. Також для їх задання та вивчення все частіше використовують теорію функціональних рівнянь.

Дана робота присвячена одній сингулярній монотонно спадній функції, залежній від двох параметрів q_0 і q_1 ($0 < q_i < 1$, $q_0 + q_1 < 1$), зокрема як розв'язку системи трьох функціональних рівнянь. Для якої ми вказуємо більш широкий континуальний двопараметричний клас (залежний від тих же параметрів) функцій, кожна з яких є або ніде не монотонною, або монотонною і сингулярною (за виключенням кількох вироджених випадків).

Нагадаємо [1] деякі відомі поняття і факти з теорії Q_3 – зображення дійсних чисел з $[0, 1]$, які будуть далі використовуватись. Нехай $Q_3 = \{q_0, q_1, q_2\}$ – впорядкована множина чисел, де $q_k > 0$, $q_0 + q_1 + q_2 = 1$. Відомо [1], що для довільного числа

$x \in [0,1]$ існує послідовність (α_n), $\alpha_n \in A_3 = \{0,1,2\}$ така, що

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right] \equiv \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \tag{1}$$

де $\beta_0 = 0$, $\beta_k = \sum\limits_{j=0}^{k-1} q_j = \beta_{k-1} + q_{k-1}$, тобто $\beta_1 = q_0$, $\beta_2 = q_0 + q_1$, $\beta_3 = q_0 + q_1 + q_2 = 1$.

Розклад числа x у ряд (1) називається його Q_3 – *представленням*, а скорочений (символічний) запис $\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ називають Q_3 – *зображенням*, при цьому α_n називається n-тим Q_3 – символом цього зображення. Якщо Q_3 – зображення є періодичним, то його період записується у круглих дужках.

Взагалі кажучи, поняття n-ого Q_3 – символа числа x є некоректно визначеним, оскільки деякі числа мають по два Q_3 – зображення, це числа виду

$$\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n(0)} = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}[\alpha_n-1](2)}.$$

Такі числа називаються Q_3 – *раціональними*, а решта, тобто ті, що не містять періода (0) чи (2), мають єдине Q_3 – зображення і називаються Q_3 – *ірраціональними.* Для подальших міркувань важливим є поняття циліндра, тому нагадаємо його.

Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ — фіксований впорядкований набір символів з алфавіту A_3. Циліндром рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$ називається множина $\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m}$ всіх чисел $x \in [0,1]$, які мають наступне Q_3 – зображення $x = \Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m\alpha_{m+1}\ldots\alpha_{m+k}\ldots}$, $\alpha_{m+i} \in A_3$.

Циліндр $\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m}$ є відрізком з кінцями $a = \Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m(0)}$ і $b = \Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m(2)}$. Крім цього циліндри мають наступні властивості:

1)$\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m} = \bigcup\limits_{i=0}^{2} \Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m i}$;

2)$max\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m i} = min\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m(i+1)}$;

3)$|\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m}| = \prod\limits_{i=1}^{m} q_{c_i} \to 0 \ (m \to \infty)$;

4) $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_m} = x \equiv \Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_m\ldots}$ для довільної послідовності (c_m), $c_m \in A_3$.

Якщо всі $q_i = \frac{1}{3}$, то Q_3 – зображення є класичним трійковим зображенням.

1. Умови існування розв'язку системи трьох функціональних рівнянь

Нехай задано чотири набори дійсних чисел q_i, β_i, b_i та d_i, де $i = 0, 1, 2$, причому

$$\begin{cases} q_i > 0, \\ q_0 + q_1 + q_2 = 1, \\ \beta_0 = 0, \beta_k = \sum\limits_{i=0}^{k-1} q_i, \\ |d_i| < 1, \\ 0 \leq b_i < 1. \end{cases}$$

Для $x \in [0, 1]$ розглядається система трьох функціональних рівнянь

$$f(\beta_i + q_i x) = b_{[2-i]} + d_{[2-i]} f(x), \quad i = 0, 1, 2. \tag{2}$$

Спочатку зауважимо, що коли $\Delta^{Q_3}_{c_1 c_2 \ldots c_n \ldots}$ — Q_3 – зображення числа u, $c_n = c_n(u)$, то $\beta_i + q_i u = \Delta^{Q_3}_{i c_1 c_2 \ldots c_n \ldots}$. Тому систему (2) можна записати у формі

$$f(\Delta^{Q_3}_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = b_{[2-i]} + d_{[2-i]} f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}), \ \ i = 0, 1, 2, \tag{3}$$

або $f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = b_{[2-\alpha_1]} + d_{[2-\alpha_1]} f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}) \ \ \forall \ \ (\alpha_n) \in L \equiv A_3 \times A_3 \times \ldots \times A_3 \times \ldots$, які рівносильні початковій системі лише при додаткових умовах, що стосуються різних зображень Q_3 – раціональних чисел, а саме: якщо $x = \Delta^{Q_3}_{c_1 c_2 \ldots c_n (0)} = \Delta^{Q_3}_{c_1 c_2 \ldots [c_n - 1](2)}$, то рівності (3) мають місце як для першого, так і для другого Q_3 – зображення.

Зупинемося на кількох часткових випадках.

Випадок 1. Нехай $d_0 = d_1 = d_2 = 0$, тоді система (2) набуде вигляду

$$f(\beta_i + q_i x) = b_{[2-i]}, \ \ i = 0, 1, 2.$$

Очевидно, що остання система має розв'язки в класі обмежених і визначених на $[0, 1]$ функцій, якщо функція f є коректно визначеною в Q_3 – раціональних точках, зокрема $f(\beta_0 + q_0 \Delta^{Q_3}_{(2)}) = f(\beta_1 + q_1 \Delta^{Q_3}_{(0)})$ і $f(\beta_1 + q_1 \Delta^{Q_3}_{(2)}) = f(\beta_2 + q_2 \Delta^{Q_3}_{(0)})$. А це можливо тоді і тільки тоді, коли $b_0 = b_1 = b_2$.

В цьому випадку розв'язком системи є функція $f(x) = const = b_0$.

Випадок 2. Нехай $d_i = d_j = 0$ і $d_k \neq 0$, де $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$, тоді система (2) набуде вигляду

$$\begin{cases} f(\beta_k + q_k x) = b_{[2-k]} + d_{[2-k]} f(x), \\ f(\beta_m + q_m x) = b_{[2-m]}, \ \text{ де } \ m \in \{i, j\}. \end{cases}$$

Розглянемо випадок, коли $d_0 = d_1 = 0$ і $d_2 \neq 0$. Міркуючи аналогічно до пункту 1, маємо $f(\beta_0 + q_0 \Delta^{Q_3}_{(2)}) = f(\beta_1 + q_1 \Delta^{Q_3}_{(0)})$ і $f(\beta_1 + q_1 \Delta^{Q_3}_{(2)}) = f(\beta_2 + q_2 \Delta^{Q_3}_{(0)})$, а це можливо тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} b_2 + d_2 b_0 = b_1, \\ b_1 = b_0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_2 = b_0(1-d_2), \\ b_1 = b_0. \end{cases}$$

Для двох інших випадків, при $d_0 = d_2 = 0$ і $d_1 \neq 0$ або $d_1 = d_2 = 0$ і $d_0 \neq 0$ відповідно мають місце

$$\begin{cases} b_1 = b_0(1-d_1), \\ b_2 = b_0; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} b_0 = b_2(1-d_0), \\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

У цьому випадку система (3) є коректно визначеною тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} b_k = b_j(1-d_k), \\ b_i = b_j. \end{cases}$$

Випадок 3. Нехай $d_i = 0$ та $d_j \neq 0 \neq d_k$, де $\{i,j,k\} = \{0,1,2\}$. Тоді система (2) запишеться у вигляді

$$\begin{cases} f(\beta_m + q_m x) = b_{[2-m]} + d_{[2-m]} f(x), \text{ де } m \in \{i,j\}, \\ f(\beta_k + q_k x) = b_{[2-k]}. \end{cases}$$

Детально розглянемо лише випадок, коли $d_0 = 0$ і $d_1 \neq 0 \neq d_2$. Використовуючи аналогічні міркування до попередніх випадків (прирівнюємо значення функції для двох різних Q_3 – зображень в Q_3 – раціональних точках) та рівності системи (2) n разів, отримаємо наступну систему

$$\begin{cases} b_2 + d_2 b_0 = b_1 + d_1 \left(b_2 + d_2 b_2 + d_2^2 b_2 + \ldots + d_2^{n-1} b_2 + d_2^{n-1} f\left(\Delta^{Q_3}_{(2)}\right)\right), \\ b_1 + d_1 b_0 = b_0. \end{cases}$$

Очевидно, що $d_2^{n-1} f\left(\Delta^{Q_3}_{(2)}\right) \to 0$ при $n \to \infty$, тоді сума виразу $b_2 + d_2 b_2 + d_2^2 b_2 + \ldots + d_2^{n-1} b_2 + d_2^{n-1} f\left(\Delta^{Q_3}_{(2)}\right)$ прямує до $\dfrac{b_2}{1-d_2}$, отже,

$$\begin{cases} b_2 + d_2 b_0 = b_1 + d_1 \dfrac{b_2}{1-d_2}, \\ b_1 = b_0(1-d_1), \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \begin{cases} b_2 = b_0(1-d_2), \\ b_1 = b_0(1-d_1); \end{cases} \\ d_1 + d_2 = 1. \end{array} \right.$$

Для двох інших випадків при $d_1 = 0$ або $d_2 = 0$, отримаємо відповідно

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} b_1 = b_0\dfrac{1}{1-d_0}, \\ b_2 = b_0\dfrac{1-d_2}{1-d_0}; \end{cases} \\ \quad d_0 + d_2 = 1. \end{array}\right. \quad \text{або} \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} b_1 = b_0\dfrac{1-d_1}{1-d_0}, \\ b_2 = b_0\dfrac{1}{1-d_0}; \end{cases} \\ \quad d_0 + d_1 = 1. \end{array}\right.$$

Система (2) у випадку 3 є коректно визначеною тоді і тільки тоді, коли

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} b_1 = b_0\dfrac{1-d_1}{1-d_0}, \\ b_2 = b_0\dfrac{1-d_2}{1-d_0}; \end{cases} \\ d_0 + d_1 + d_2 = 1. \end{array}\right.$$

Тепер проведемо загальні міркування.

Лема 1. *Для того, щоб система* (2) *мала розв'язки в класі визначених і обмежених на* $[0, 1]$ *функцій, необхідно і достатньо, щоб*

$$\begin{cases} b_1 - b_2 + \dfrac{b_2 d_1}{1-d_2} - \dfrac{b_0 d_2}{1-d_0} = 0, \\ b_0 - b_1 + \dfrac{b_2 d_0}{1-d_2} - \dfrac{b_0 d_1}{1-d_0} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Доведення. При умові (припущенні) існування розв'язку системи (2) знайдемо його форму.

Застосувавши рівності системи (2) n разів, отримаємо

$$f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = b_{[2-\alpha_1]} + \sum_{k=2}^{n}\left[b_{[2-\alpha_k]}\prod_{j=1}^{n-1} d_{[2-\alpha_j]}\right] + \left(\prod_{j=1}^{n} d_{[2-\alpha_j]}\right) f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\ldots\alpha_{n+k}\ldots}).$$

Оскільки функція визначена в кожній точці відрізка $[0, 1]$, то цей процес можна продовжувати до нескінченності і він є збіжним, оскільки залишковий член $\left(\prod\limits_{j=1}^{n} d_{[2-\alpha_j]}\right) f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\ldots\alpha_{n+k}\ldots})$ прямує до нуля, завдяки тому, що f — обмежена, а $\left(\prod\limits_{j=1}^{n} d_{[2-\alpha_j]}\right) \to 0$ $(n \to \infty)$. Отже, розв'язок системи (2), у випадку його існування, має вигляд

$$f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = b_{[2-\alpha_1]} + \sum_{k=2}^{\infty}\left[b_{[2-\alpha_k]}\prod_{j=1}^{k-1} d_{[2-\alpha_j]}\right]. \tag{5}$$

Чи визначає рівність (5) функцію?

Якщо число x є Q_3 – ірраціональним числом, а отже, має єдине Q_3 – зображення, то очевидно, що так. Залишається перевірити чи рівні значення виразу (5) для двох різних зображень Q_3 – раціональної точки: $x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n(0)} \equiv \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}[\alpha_n-1](2)}$, де $\alpha_n \neq 0$. З цією метою виразимо різницю:

$$\delta \equiv f\left(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n(0)}\right) - f\left(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n(2)}\right) =$$
$$= \prod_{k=1}^{n-1} d_{[2-\alpha_k]}\left(b_{[2-\alpha_n]} - b_{[3-\alpha_n]} + d_{[2-\alpha_n]} f\left(\Delta^{Q_3}_{(0)}\right) - d_{[3-\alpha_n]} f\left(\Delta^{Q_3}_{(2)}\right)\right) =$$
$$= \left(\prod_{i=1}^{n-1} d_{[2-\alpha_i]}\right)\left(b_{[2-\alpha_n]} - b_{[3-\alpha_n]} + \frac{b_2 d_{[2-\alpha_n]}}{1-d_2} - \frac{b_0 d_{[3-\alpha_n]}}{1-d_0}\right).$$

Для того, щоб $\delta = 0$ (значення для двох різних Q_3 –зображень кожної Q_3 – раціональної точки співпадали), необхідно і достатньо, щоб

$$\rho_{\alpha_n} \equiv \left(b_{[2-\alpha_n]} - b_{[3-\alpha_n]} + \frac{b_2 d_{[2-\alpha_n]}}{1-d_2} - \frac{b_0 d_{[3-\alpha_n]}}{1-d_0}\right) = 0,$$

як при $\alpha_n = 1$, так і при $\alpha_n = 2$, тобто, щоб мала місце система (4).

Н е о б х і д н і с т ь. Оскільки система (4) має розв'язки, то кожен з них має форму (5), а рівність (5) коректно визначає функцію, тоді і тільки тоді, коли має місце система (4).

Д о с т а т н і с т ь. З того, що має місце система (4) випливає коректність визначення функції f рівністю (5), яка задовольняє систему функціональних рівнянь (2), а отже, є її розв'язком. □

Наслідок 1. *Якщо* $b_0 = 0$*,* $b_1 = d_0$*,* $b_2 = d_0 + d_1$*, то* $d_0 + d_1 + d_2 = 1$ *і система* (2) *у класі обмежених і визначених на* $[0,1]$ *функцій має єдиний розв'язок — функцію, визначену рівністю* (5)*.*

Лема 2. *Якщо* $b_0 = 0$*,* $b_1 = d_0$*,* $b_2 = d_0 + d_1$*, то із системи* (4) *випливає, що*

$$d_0 + d_1 + d_2 = 1 \quad \textit{або} \quad d_0 = 0 = d_1.$$

Доведення. Якщо $b_0 = 0$, $b_1 = d_0$, $b_2 = d_0 + d_1$, то система (4) записується у вигляді

$$\begin{cases} d_0 - d_0 - d_1 + \dfrac{(d_0+d_1)d_1}{1-d_2} - \dfrac{0\cdot d_2}{1-d_0} = 0, \\ 0 - d_0 + \dfrac{(d_0+d_1)d_0}{1-d_2} - \dfrac{0\cdot d_1}{1-d_0} = 0, \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} \dfrac{d_1(-1+d_0+d_1+d_2)}{1-d_2} = 0, \\ \dfrac{d_0(-1+d_0+d_1+d_2)}{1-d_2} = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{c} d_0 + d_1 + d_2 = 1, \\ d_0 = 0 = d_1. \end{array} \right.$$

□

2. Умови неперервності функції як розв'язку системи трьох функціональних рівнянь

Теорема 1. *Якщо для системи* (2) *одночасно виконуються умови:*

$$\begin{cases} d_0 + d_1 + d_2 = 1, \\ \max\limits_i |d_i| < 1, \\ b_0 = 0, b_k = \sum\limits_{i=0}^{k-1} d_i > 0, \end{cases} \tag{6}$$

то функція f визначена рівністю (5) *є неперервною на відрізку* $[0,1]$.

Доведення. Нехай задано число x та $x_0 \in [0,1]$, причому $\alpha_i(x) = \alpha_i(x_0)$ для всіх $i < n$ та $\alpha_n(x) \neq \alpha_n(x_0)$. Розглянемо різницю

$$f(x) - f(x_0) = \prod_{i=1}^{n-1} d_{[2-\alpha_i]} \left(f\left(\Delta^{Q_3}_{\alpha_n(x)\alpha_{n+1}(x)\ldots\alpha_{n+k}(x)\ldots}\right) - f\left(\Delta^{Q_3}_{\alpha_n(x_0)\alpha_{n+1}(x_0)\ldots\alpha_{n+k}(x_0)\ldots}\right)\right).$$

Число x_0 може бути Q_3 – раціональним або Q_3 – ірраціональним, тому необхідно розглянути два випадки.

Нехай x_0 — Q_3 – ірраціональне число, тоді умова $x \to x_0$ рівносильна умові $n \to \infty$ і зокрема

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \prod_{i=1}^{n-1} d_{[2-\alpha_i]} \leq (\max\{|d_0|, |d_1|, |d_2|\})^{n-1} \to 0 \ \ (n \to \infty),$$

тобто $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Отже, функція $f(x)$ неперервна в точці x_0.

Якщо x_0 — Q_3 – раціональне число, тобто має два різних Q_3 – зображення, то неперервність доводиться аналогічними міркуваннями з використанням означення неперервності та виразу функції f. Але, коли x прямує до x_0 зліва необхідно використати зображення $\Delta^{Q_3}_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\ldots\alpha_n(x_0)(0)}$, а коли x прямує до x_0 справа — $\Delta^{Q_3}_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\ldots[\alpha_n-1](x_0)(2)}$. □

Лема 3. *Для приросту* $\mu_f(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n}) \equiv f\left(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n(2)}\right) - f\left(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n(0)}\right)$ *функції f на циліндрі* $\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n} \equiv \left[\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n(0)}; \Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n(2)}\right]$ *має місце рівність*

$$\mu_f(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n}) = -\prod_{j=1}^{n-1} d_{[2-c_j]}.$$

Доведення. Використовуючи, вираз (5) для значення функції f, отримуємо

$$f\left(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n(2)}\right) - f\left(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n(0)}\right) = \prod_{j=1}^{n-1} d_{[2-c_j]} \left(f\left(\Delta^{Q_3}_{(2)}\right) - f\left(\Delta^{Q_3}_{(0)}\right)\right) =$$

$$= \prod_{j=1}^{n-1} d_{[2-c_j]} \left(\frac{b_0}{1-d_0} - \frac{b_2}{1-d_2} \right) = -\prod_{j=1}^{n-1} d_{[2-c_j]}.$$

□

Теорема 2. *Якщо для системи* (2) *виконуються умови* (6), *то функція є:*

1) монотонною і набуває невід'ємних значень, якщо всі $d_i \geq 0$, $i = \overline{0,2}$, *зокрема строго монотонною, якщо всі* $d_i > 0$*;*

2) сталою на циліндрі $\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m}$, *якщо існує* $d_{c_k} = 0$ *при* $k < m$*;*

3) ніде не монотонною, якщо всі $d_i \neq 0$ *та існує хоча б одне* $d_k < 0$, $k = \{1, 2\}$.

Доведення. Твердження 1) і 2) випливають з попередньої леми.

Твердження 3) доведемо методом від супротивного. Припустимо, що умови твердження 3) виконуються і знайдеться інтервал монотонності функції f. Але очевидно, що існує циліндр $\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n}$, який повністю належить цьому інтервалу монотонності, а отже, є проміжком монотонності функції f.

Зважаючи на те, що всі $d_i \neq 0$ та існує хоча б одне $d_i < 0$, $i = \overline{0,2}$, та попередню лему, маємо $\mu_f(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n}) \neq 0$ і $\mu_f(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n 0}) \cdot \mu_f(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n i}) < 0$. Тобто на одному з циліндрів $\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n 0}$ чи $\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n i}$ функція має додатній приріст, а на іншому – від'ємний, що суперечить монотонності функції f на циліндрі $\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n}$ і доводить останнє твердження та всю теорему. □

Наслідок 2. *Якщо виконуються умови* (6) *і* $d_i = 0$, *то* f *є сингулярною функцією канторівського типу.*

3. Інверсор як розв'язок системи трьох функціональних рівнянь

Нехай $b_i = \beta_i$ та $d_i = q_i$, $i = \overline{0,2}$. Тоді система трьох функціональних рівнянь набуде вигляду

$$f(\beta_i + q_i x) = \beta_{[2-i]} + q_{[2-i]} f(x), \quad i = 0, 1, 2, \tag{7}$$

де $x \in [0,1]$, яка для класичного трійкового зображення має вигляд

$$f\left(\frac{i+x}{3}\right) = \frac{2 - i + f(x)}{3},$$

єдиним розв'язком останньої є функція $f(x) = 1 - x$.

Теорема 3. *Єдиним розв'язком системи функціональних рівнянь* (7) *в класі обмежених і визначених в кожній точці* $[0,1]$ *є неперервна функція, значення якої в точці* x *обчислюється за формулою*

$$f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \beta_{[2-\alpha_1]} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{[2-\alpha_k]} \prod_{j=1}^{k-1} q_{[2-\alpha_j]} \right). \tag{8}$$

Доведення. Зважаючи на те, що $b_i = \beta_i$ та $d_i = q_i$ для всіх $i = \overline{0,2}$, функція f є коректно визначеною (оскільки виконуються умови (4) і (6)), то рівність (5) переписується у формі (8).

Беручи до уваги, що для функції f виконуються умови (6), то f — неперервна мотонноспадна функція на відрізку $[0,1]$ і набуває невід'ємних значень. $\square$

Зауваження 1. *Система* (7) *задає систему ітерованих функцій, для яких атрактором буде деяка компактна множина в R^2. Але висновок про те, що цією множиною буде графік неперервої функції на* $[0,1]$, *взагалі кажучи, є нетривіальним.*

Зауваження 2. *Система* (7) *може бути записана наступним чином*

1) $f(\delta_i(x)) = \beta_{[2-i]} + q_{[2-i]} f(x), \quad i = 0,1,2,$ *де* $\delta_i(x) = \Delta^{Q_3}_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$*;*

2) $f(x) = \beta_{[2-\alpha_1]} + q_{[2-\alpha_1]} f(\omega(x)), \quad \alpha_1 \in A_3,$ *де* $\omega(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$ *– оператор зсуву цифр Q_3 – зображення числа x.*

Означення **1.** Інверсором цифр Q_3 – зображення числа $\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = x \in [0,1]$ (далі інверсором) називатимемо функцію I, визначену на $[0,1]$ рівністю

$$I(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]\ldots} = \beta_{[2-\alpha_1]} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{[2-\alpha_k]} \prod_{j=1}^{k-1} q_{[2-\alpha_j]} \right). \qquad (9)$$

Зауваження 3. *Єдиним розв'язком системи* (7) *в класі обмежених і визначених на* $[0,1]$ *функцій є інверсор I.*

4. Функціональні співвідношення

Впорядковані множини додатних дійсних чисел $Q_3 = \{q_0; q_1; q_2\}$ і $Q'_3 = \{q'_0; q'_1; q'_2\}$ називатимемо *спряженими*, якщо $q'_0 + q'_1 + q'_2 = 1$ і $q'_0 = q_2, q'_1 = q_1, q'_2 = q_0$.

Теорема 4. *Для інверсора I цифр Q_3 – зображення чисел відрізка* $[0,1]$ *має місце рівність*

$$I(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = 1 - \Delta^{Q'_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}. \qquad (10)$$

Доведення. Нехай $x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ — довільне число з інтервалу $(0;1)$. Тоді $1 - x = x'$.

Легко бачити, що має місце рівність: $\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m} \equiv \Delta^{Q'_3}_{c'_1c'_2\ldots c'_m}$, де $c'_i = 2 - c_i$. Справді, оскільки x належить системі вкладених циліндрів $\Delta^{Q_3}_{\alpha_1}, \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2}, \ldots, \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}, \ldots$, то $x' = 1 - x$ належить системі вкладених циліндрів $\Delta^{Q'_3}_{\alpha'_1}, \Delta^{Q'_3}_{\alpha'_1\alpha'_2}, \ldots, \Delta^{Q'_3}_{\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_n}, \ldots$. Тому,

$$x' = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^{Q'_3}_{\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^{Q'_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]}.$$

З $x + x' = 1$ випливає рівність $\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} + \Delta^{Q'_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]\ldots} = 1$, яка рівносильна рівності $I(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = 1 - \Delta^{Q'_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$. $\square$

Лема 4. *Для інверсора I мають місце наступні функціональні співвідношення:*

$$I(\beta_i + q_i x) = \beta_{[2-i]} + q_{[2-i]} I(x), \quad i = 0, 1, 2; \tag{11}$$

$$I(x) = \beta_{[2-\alpha_1]} + q_{[2-\alpha_1]} I(\omega(x)), \quad \alpha_1 \in A_3; \tag{12}$$

$$I(\beta_i + q_i x) = \beta_{[3-i]} - q_{[2-i]} g(x), \quad i = 0, 1, 2; \tag{13}$$

$$I(x) = \beta_{[3-\alpha_1]} - q_{[2-\alpha_1]} g(\omega(x)), \quad \alpha_1 \in A_3, \tag{14}$$

де $\omega(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$ *– оператор зсуву цифр числа* x, $g(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q'_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ *і* $Q'_3 = \{q'_0, q'_1, q'_2\}$ *спряжена до* Q_3.

Доведення. Система (11) є очевидною.

Доведемо, що має місце система (13). Для цього використаємо рівність (10) і розглянемо спочатку функцію $g(x)$ визначену рівністю

$$g(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q'_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

Очевидно, що $g(\Delta^{Q_3}_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = g(\beta_i + q_i \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots})$, причому

$$g(\Delta^{Q_3}_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q'_3}_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = \beta'_i + q'_i \Delta^{Q'_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = \beta'_i + q'_i g(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \beta'_i + q'_i g(x).$$

Тоді у випадку, якщо:

1) $i = 0$, то $\beta'_0 + q'_0 g(x) = 0 + q_2 g(x) = 1 - \beta_3 + q_2 g(x)$;
2) $i = 1$, то $\beta'_1 + q'_1 g(x) = q'_0 + q'_1 g(x) = q_2 + q_1 g(x) = 1 - \beta_2 + q_1 g(x)$;
3) $i = 2$, то $\beta'_2 + q'_2 g(x) = q'_0 + q'_1 + q'_2 g(x) = q_2 + q_1 + q_0 g(x) = 1 - \beta_1 + q_0 g(x)$.

Тому має місце

$$g(\beta_i + q_i x) = 1 - \beta_{[3-i]} + q_{[2-i]} g(x).$$

Зважаючи на останню рівність та рівність (10), маємо

$$I(\beta_i + q_i x) = 1 - g(\beta_i + q_i x) = 1 - \left(1 - \beta_{[3-i]} + q_{[2-i]} g(x)\right),$$

тобто

$$I(\beta_i + q_i x) = \beta_{[3-i]} - q_{[2-i]} g(x).$$

Якщо додатково ввести функцію, яку називають оператором зсуву цифр числа x, для якої має місце рівність

$$\omega(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots},$$

то систему рівнянь (11) можна переписати у вигляді (12), а систему (13) можна переписати у вигляді (14). $\square$

Література

[1] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів —Київ: Вид-во НПУ ім. М.П.Драгоманова, — 1998. —296с.

[2] *Працьовитий М. В.* Ніде не монотонні сингулярні функції // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2011. — № 12. — С. 24-36.

[3] *Працьовитий М. В., Калашніков А. В.* Про один клас неперервних функцій зі складною локальною будовою більшість з яких є сингулярні або недиференційовані // Труды ИПММ НАН Украины. — 2011. — Том 23. — С. 180-191.

[4] *Працьовитий М. В., Калашніков А. В.* Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов'язані з Q – зображенням дійсних чисел // Укр. мат. журнал — 2013. — Т 65. — №3. — С. 405-417.

[5] *Працьовитий М. В., Косопльоткіна О. В.* Фрактальні властивості суперпозиції сингулярних функцій розподілу // Теор. ймов. та мат статистика. — 2002. — Вип.67. — С. 61-69.

[6] *Пелюх Г. П., Шарковский А. Н.* Введение в теорию функциональных уравнений. — Киев: Наукова думка, 1974. — 119 с.

[7] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук. думка, 1992. — 208с.

[8] *Billingsley P.* The singular function on bold play // Am. Sci. — 1983. — 71. — P. 392-397.

[9] *Minkowski H.* Gesammeite Abhandlungen. — Berlin, 1911. — Bd 2. — P. 50-51.

[10] *Salem R.* On some singular monotonic function which are strictly increasing // Trans. Amer. Math. Soc. — 1943. — Vol.53, no.3. — P. 427-439.

[11] *Sierpinski W.* Une exemple elementaire d'une fonction croissante qui a presque partout une derivee nulle // Gion. Math. Battaglini(3). — 1916. — 1. — P. 314-334.

[12] *Zamfirescu T.* Most monotone functions are singular // Amer. Math. Mon. — 1981. — 88. — P. 47-49.