МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УКРАИНСКОЙ ССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени А. М. ГОРЬКОГО

На правах рукописи

В. Ф. АНТОНЕНКО

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ В НЕКОТОРЫХ КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЯХ ПРИ ПОМОЩИ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

(Диссертация выполнена на русском языке)

№ 01.01.02 — ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

КИЕВ—1975

На правах рукописи

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УКРАИНСКОЙ ССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени А. М. ГОРЬКОГО

АНТОНЕНКО Владимир Феодосьевич

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ В НЕКОТОРЫХ КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЯХ ПРИ ПОМОЩИ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

№ 01.01.02 – дифференциальные и интегральные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

(Диссертация выполнена на русском языке)

Киев – 1975

Работа выполнена на кафедре высшей математики Киевского ордена Трудового Красного Знамени института инженеров гражданской авиации

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор К.Г.Валеев

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор П.М.Сеник,
кандидат физико-математических наук, доцент В.В.Мысак

Ведущее предприятие: Институт математики АН УССР

Автореферат разослан "___"______________1975 г.

Защита состоится "___"______________1975 г.

на заседании Ученого Совета физико-математического факультета Киевского государственного педагогического института им. А.М.Горького (г.Киев-30, ул.Пирогова, 9).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Киевского государственного педагогического института им. А.М.Горького (г.Киев-30, ул.Пирогова, 9).

Ученый секретарь совета
доцент - Тычина И.И.

В настоящее время теория устойчивости движения имеет широкое применение в самых разнообразных теоретических и прикладных задачах. Одним из наиболее сложных вопросов теории устойчивости является исследование критических случаев. С критическими случаями обычно встречаемся при исследовании колебательных явлений, описываемых системами существенно нелинейных дифференциальных уравнений.

Эффективным математическим аппаратом исследования существенно нелинейных систем оказался метод осреднения. Применение метода осреднения для решения существенно нелинейных задач разрабатывалось во многих трудах Аносова Д.В., Арнольда В.И., Боголюбова Н.Н., Волосова В.М., Гребенникова Е.А., Демидовича Б.П., Жаутыкова О.А., Забрейка П.П., Коломийца В.Г., Красносельского М.А., Крейна М.Г., Крылова Н.М., Митропольского Ю.А., Моисеева Н.Н., Моргунова Б.И., Рубаника В.П., Самойленка А.М., Федорченка А.М., Фодчука В.И., Хапаева М.М., и ряда других исследователей.

Настоящая работа посвящена вопросам применения специальных функций $Cs\,\theta$, $Sn\,\theta$ введенных А.М.Ляпуновым и обобщенных М.Я.Ятаевым, в асимптотическом методе осреднения для исследования некоторых критических случаев устойчивости. Рассмотрены некоторые вопросы теории указанных функций и выясняется их связь с $Ateb$ - функциями и с лемнискатными функциями.

Реферируемая работа состоит из предисловия, введения и 4-х глав.

В первой главе приводится обзор тех работ авторов, где использованы при исследовании вопроса устойчивости специальные функции, а также рассматривается некоторые вопросы обобщения специальных функций Ляпунова, их связь с Ateb - функциями введенными Р.Розенбергом и П.М.Сенником и лемнискатными функциями, которые рассматривались еще Гауссом.

В § I главы I рассматривается основные свойства введенных А.М.Ляпуновым функций $Cs\,\theta$, $Sn\,\theta$ для исследования устойчивости системы

$$\frac{dx}{dt} = y + X, \qquad \frac{dy}{dt} = Y, \tag{1}$$

где X, Y - не зависящие от t голоморфные в некоторой области функции переменных x и y не содержащие в своих разложениях членов ниже второго измерения.

§ 2 посвящен изучению свойств обобщенных функций $Cs(\theta,n,\kappa)$, $Sn(\theta,n,\kappa)$. Функции $Cs(\theta,n,\kappa)$, $Sn(\theta,n,\kappa)$ были сведены М.Я.Ятаевым при исследовании вопроса устойчивости системы в критическом случае двойного нулевого корня с двумя группами решений, то есть системы вида:

$$\frac{dx}{dt} = y^{2\kappa-1}\left[1 + X(x,y)\right], \qquad \frac{dy}{dt} = -x^{2n-1} + Y(x,y), \tag{2}$$

где X, Y - голоморфные функции аргументов x и y разложение которых начинается членами первого и $2n$ - го измерения соответственно $(\kappa \leq n)$. Здесь также рассматривается функции, соответствующие системе дифференциальных уравнений с неголоморфными правыми частями.

В § 3 излагаются некоторые вопросы теории Ateb-функций, являющихся обращением Beta-функций. При изложении вопросов, связанных с Ateb-функциями, использованы работы Р.Розенберга и П.М.Сеника.

В § 4 автором излагается новый способ введения функций $Cs\,\theta$, $Sn\,\theta$, $Cs(\theta,n,\kappa)$, $Sn(\theta,n,\kappa)$ посредством использования амплитудной функции $\varphi = am\ell(\theta,n,\kappa)$, являющейся обращением интеграла

$$\theta = n^{-2\kappa}(\kappa)^{\frac{1-2\kappa}{2\kappa}} \int_0^{\varphi} \cos^{-\frac{1-n}{n}}\bar{\varphi}\,\sin^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}\bar{\varphi}\,d\bar{\varphi}\,, \qquad (3)$$

где $\kappa \geq 1$, $n \geq 2$, $\kappa < n$.

Здесь также отмечается связь между функциями Ляпунова их обобщениями и Ateb-функциями, рассмотренными Р.Розенбергом и П.М.Сеником.

В параграфе 5 изучается связь между лемнискатным косинусом, введенным Гауссом, и $Cs\,\theta$ при $n=2$.

Вопросам обобщения функций $Cs\,\theta$, $Sn\,\theta$ посвящен § 6. Здесь, в частности, приведены новые формулы, устанавливающие связь между функциями $Cs(\theta,n,\kappa)$, $Sn(\theta,n,\kappa)$ и тригонометрическими функциями

$$Cs(\theta,n,\kappa) = \cos^{\frac{1}{n}}\varphi\,, \qquad Sn(\theta,n,\kappa) = \left(\frac{\kappa}{n}\right)^{\frac{1}{2\kappa}} \sin^{\frac{1}{\kappa}}\varphi\,, \qquad (4)$$

если φ есть амплитудная функция, определенная из соотношения (3).

Формулы (4) позволяют интегралы от $Cs(\theta,n,\kappa)$, $Sn(\theta,n,\kappa)$ свести к вычислению интегралов от $\sin\varphi$, $\cos\varphi$.

Для функций $Cs(\theta,n,\kappa)$, $Sn(\theta,n,\kappa)$ получены некоторые аналоги тригонометрических формул, записываются степенные ряды, относящиеся к функциям Ляпунова. Указано, как с помощью обобщенного гипергеометрического ряда можно получить для табулирования функций $Cs\theta$, $Cs(\theta,n,\kappa)$ формулы, аналогичны формулам, полученным П.М.Сеником для табулирования Ateb - функций.

Глава П посвящена вопросам применения специальных функций при использовании асимптотического метода для исследования устойчивости в критических случаях.

Вопросу исследования критических случаев посвящена обширная литература, непрерывно пополняемая и до настоящего времени. Сюда следует отнести результаты, полученные Абаньшиным А.М., Барбаш..ным Е.А., Веретенниковым В.Г., Гавриловым Н.Н., Горбатенко С.А., Дапровым Г., Дубошиным Г.Н., Еругиным Н.П., Жуковским В.И., Зубовым В.И., Калининым С.В., Каменковым Г.В., Красовским Н.Н., Кущевым Б.И., Ляпуновым А.М., Малкиным И.Г., Осиповым Г.С., Персидским К.П., Плиссом В.А., Сагитовым М.С., Сафроновым Е.Т., Четаевым Н.Г., Якубовичем В.А., и рядом других авторов.

При исследовании критических случаев специальные функции применялись в работах А.М.Ляпунова, М.Я.Ятаева, Р.М.Розенберга, П.М.Сеника, А.М.Возного, Г.С.Смашова, С.А.Алишева.

§ 2 главы II посвящен вопросам применения асимптотического метода для исследования устойчивости существенно нелинейных систем. Приводится аппарат осреднения, следуя работам Н.Н.Боголюбова, Н.Д.Зубарева, Ю.А.Митропольского, В.М.Волосова, Н.Н.Моисеева, К.В.Задираки, применительно к существенно нелинейным системам.

В § 3 главы II, следуя К.Г.Валееву, излагается формализация записи интегрирования с осреднением.

В конце этого параграфа даны примеры на использование этой символики.

Исследованию устойчивости в критическом случае двойного нулевого корня с одной группой решений посвящен § 4. Рассматривается система вида

$$\frac{dx}{dt} = y + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \dots , \qquad (9)$$
$$\frac{dy}{dt} = a x^{2n-1} + \varepsilon Y_1 + \varepsilon^2 Y_2 + \dots ,$$

в которой $X_1, X_2, \dots, Y_1, Y_2, \dots$ – не зависящие от t голоморфные функции переменных x, y, которые не содержат в своих разложениях членов ниже второго и $2n-1$ измерения соответственно; a – отрицательное число, $n \geq 2$. Используя замену, предложенную Ляпуновым, систему (9) можно преобразовать к виду

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \dots ,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1^{2n-1} + \varepsilon Y_1 + \varepsilon^2 Y_2 + \dots , \tag{10}$$

где X_i, Y_i удовлетворяют указанному выше условию.
После подстановки

$$x_1 = x\,\mathrm{Cs}\,\psi , \qquad x_2 = -x^n\,\mathrm{Sn}\,\psi , \tag{11}$$

система (10) приводится к виду

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon(\mathrm{Cs}\psi X_1 - x^{1-n}\mathrm{Sn}\psi Y_1) + \varepsilon^2(\mathrm{Cs}\psi X_2 - x^{1-n}\mathrm{Sn}\psi Y_2) + \dots ,$$
$$\frac{d\psi}{dt} = x^{n-1} - \varepsilon(nx^{-1}\mathrm{Sn}\psi X_1 + x^{-n}\mathrm{Cs}\psi Y_1) + \varepsilon^2(nx^{-1}\mathrm{Sn}\psi X_2 + x^{-n}\mathrm{Cs}\psi Y_2) + \dots \tag{12}$$

Система (12) относится к системам с быстро вращающейся фазой; к ней применяется метод осреднения, изложенный в § 2.

Приводятся формулы пересчета правых частей системы (10) в правые части системы (12).

Рассмотрена система

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 ,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1^3 + \varepsilon A_1 x_1^5 x_2^7 + \varepsilon^2 A_2 x_1^4 x_2 , \tag{13}$$

где A_1, A_2 – вещественные коэффициенты, ε – малый параметр, $n = 2$. Результат исследования на устойчивость системы (13) во втором приближении сформулирован в таком виде: если $A_2 > 0$, то система неустойчива, при $A_2 < 0$ устойчива, при $A_2 = 0$ вопрос об устойчивости системы остается открытым.

В качестве примера исследована система

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + \varepsilon A x_2^2 , \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1^3 + \varepsilon B x_1^4 . \qquad (14)$$

Относительно устойчивости системы (14) сделан вывод: если $AB < 0$ – то исходная система неустойчива, при $AB > 0$ устойчива.

В § 5 рассматривается система

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2^{2k-1}\left[1 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \ldots\right],$$
$$\frac{dx_2}{dt} = a x_1^{2n-1} + \varepsilon Y_1 + \varepsilon^2 Y_2 + \ldots , \qquad (15)$$

где X_i, Y_i – голоморфные функции своих аргументов, разложения которых начинаются с первого и $2n$-го измерения соответственно, a – отрицательная константа, ε – малый параметр. Этой системе соответствует критических случай двойного нулевого корня с двумя группами решений. Преобразование системы (15) осуществляется с помощью подстановки

$$x_1 = x^{k}\, Cs(\psi, n, k), \qquad x_2 = -x^{n}\, Sn(\psi, n, k). \qquad (16)$$

Тогда система (15) приводится к виду

$$\frac{dx}{dt} = \mu\left(-x^{2nk-n-k+1}\, Cs^{2n-1}\psi\, Sn^{2k-1}\psi\, X_1 - x^{1-n}\, Sn^{2k-1}\psi\, Y\right) + \mu^2 \ldots ,$$

где

$$\alpha_1 = -\frac{2\kappa-1}{(2\ell-1)(2\kappa-1)-1}; \qquad \beta_1 = -\frac{1}{(2\ell-1)(2\kappa-1)-1}, \tag{23}$$

$$\alpha_2 = -\frac{2m-1}{(2n-1)(2m-1)-1}; \qquad \beta_2 = -\frac{1}{(2n-1)(2m-1)-1},$$

систему (22) можно привести к виду

$$\frac{dz_1}{dt} = z_2^{2\kappa-1}\left(1+\varepsilon Z_1^{(1)}+\varepsilon^2 Z_2^{(1)}+\ldots\right), \quad \frac{dz_3}{dt} = z_4^{2m-1}\left(1+\varepsilon Z_1^{(3)}+\varepsilon^2 Z_2^{(3)}+\ldots\right),$$

$$\frac{dz_2}{dt} = -z_1^{2\ell-1}+\varepsilon Z_1^{(2)}+\varepsilon^2 Z_2^{(2)}+\ldots, \quad \frac{dz_4}{dt} = -z_3^{2n-1}+\varepsilon Z_1^{(4)}+\varepsilon^2 Z_2^{(4)}+\ldots . \tag{24}$$

Для проведения системы (24) к стандартному виду, производится замена

$$z_1 = x_1^{\kappa}\, Cs(y,\kappa,\ell), \qquad z_3 = x_2^{m}\, Cs(y_2,m,n), \tag{25}$$

$$z_2 = -x_1^{\ell}\, Sn(y,\kappa,\ell), \qquad z_4 = -x_2^{n}\, Sn(y_2,m,n).$$

Выполняя замену (25) и произведя необходимые преобразования, получено систему стандартного вида

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\varepsilon}{\kappa}\left(-x_1^{2\kappa\ell-\ell-\kappa+1}\, Cs^{2\ell-1}y_1\, Sn^{2\kappa-1}y_1 Z_1^{(1)} - x_1^{1-\ell}\, Sn^{2\kappa-1}y_1 Z_1^{(2)}\right)+\frac{\varepsilon^2}{\kappa}\ldots,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\varepsilon}{m}\left(-x_2^{2mn-m-n+1}\, Cs^{2n-1}y_2\, Sn^{2m-1}y_2 Z_1^{(3)} - x_2^{1-n}\, Sn^{2m-1}y_2 Z_1^{(4)}\right)+\frac{\varepsilon^2}{m}\ldots, \tag{26}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = x_1^{2\kappa\ell-\ell-\kappa}+\frac{\varepsilon}{\kappa}\left(\ell x_1^{2\kappa\ell-\ell-\kappa}\, Sn^{2\kappa}y_1 Z_1 - \kappa x_1^{-\ell}\, Cs\, y_1 Z_2\right)+\frac{\varepsilon^2}{\kappa}\ldots,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = x_2^{2mn-m-n} + \frac{\varepsilon}{m}\left(n x_2^{2mn-m-n} \, \mathrm{Sn}^{2m} y_2 Z_3 - m x_2^{-n} \, \mathrm{Cs}\, y_2 Z_4\right) + \frac{\varepsilon^2}{m} \ldots .$$

В системе (26) переменные x_1, x_2 – медленные переменные, а переменные y_1, y_2 – быстрые. К системе (26) применим метод осреднения, изложенный в § 2 главы II в его общей постановке, когда кратные медленные и быстрые переменные. Приведен пример исследования устойчивости системы в критическом случае четырехкратного нулевого корня с четырьмя группами решений.

Содержание § 7 главы посвящено применению специальных функций в асимптотических методах осреднения. Рассматривается система $2n+m$ порядка

$$\frac{dx_{1s}}{dt} = x_{2s}^{2k_s-1} + \varepsilon X_{11}^{(s)} + \varepsilon^2 X_{12}^{(s)} + \ldots ,$$

$$\frac{dx_{2s}}{dt} = -n_s x_{1s}^{2n_s-1} + \varepsilon X_{21}^{(s)} + \varepsilon^2 X_{22}^{(s)} + \ldots , \qquad (27)$$

$$\frac{dY}{dt} = DY + \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r L_r(X, Y) .$$

Здесь $s = 1, 2, \ldots, n$; a_s – положительные константы, k_s, n_s – целые положительные числа, такие, что $k_s \geq 1$, $n_s \geq 2$, $k_s \leq n_s$; $X_{1i}^{(s)}, X_{2i}^{(s)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и проекции вектора L_r – голоморфные относительно переменных x_{1i}, x_{2i}, y_i функции причем, разложение $X_{1i}^{(s)}, X_{2i}^{(s)}$ по x_{2s}, x_{1s} начинаются с членов не ниже $2k_s, 2n_s$ измерения относительно x_{2s}, x_{1s}

соответственно. Постоянная $D\cdot(m\times m)$ матрица с собственными числами, вещественные части которых отрицательные.

Вводятся новые переменные x_s, ψ_s $(s=1,2,\ldots,n)$:

$$x_{1s}=x_s^{\kappa_s}Cs\psi_s+\varepsilon\Psi_1^{(s)}(x_s,\psi_s,y_i)+\varepsilon^2\Psi_2^{(s)}(x_s,\psi_s,y_i)+\ldots,$$
$$x_{2s}=-x_s^{n_s}Sn\psi_s+\varepsilon\Phi_1^{(s)}(x_s,\psi_s,y_i)+\varepsilon^2\Phi_2^{(s)}(x_s,\psi_s,y_i)+\ldots, \tag{28}$$

где функции $Cs\psi_s$, $Sn\psi_s$ – двопараметрические и зависят от κ_s, n_s. В результате замены (28), система уравнений (27) приобретает вид

$$\frac{dx_s}{dt}=\varepsilon P_{1s}(x_s,\psi_s)+\varepsilon^2P_{2s}(x_s,\psi_s)+\ldots,$$
$$\frac{d\psi_s}{dt}=x_s^{2n_s\kappa_s-n_s-\kappa_s}+\varepsilon Q_{1s}(x_s,\psi_s)+\varepsilon^2Q_{2s}(x_s,\psi_s)+\ldots, \tag{29}$$
$$\frac{dY}{dt}=DY+\sum_{r=1}^{\infty}\varepsilon^rF_r(x_s,\psi_s,y_i),$$
$$(s=1,2,\ldots,n;\ i=1,2,\ldots,m).$$

Вопрос об устойчивости решений системы (27) будет сведен к вопросу об устойчивости решений подсистемы $2n$-го порядка относительно переменных x_s, ψ_s, как только будет указан путь определения функций $\Psi_j^{(s)}, \Phi_j^{(s)}, P_{js}, Q_{js}$ $(j=1,2,\ldots)$. Указанная подсистема относится к стандартному типу систем с быстро вращающейся фазой.

Доказано, что при определенных условиях, нахождение коэффициентов P_{js}, Q_{js} сводится к решению алгебраических систем, а нахождение коэффициентов $\Psi_j^{(s)}$, $\Phi_j^{(s)}$ приводит к решению систем уравнений в частных производных. Рассмотрены приемы решения этих систем.

Рассуждения этого параграфа иллюстрируются примерами.

Третья глава диссертации состоит из четырех параграфов и посвящена применению эллиптических функций в асимптотическом методе при исследовании устойчивости уравнения Дюффинга, которое рассматривается как существенно нелинейное.

В первом параграфе даются необходимые сведения и формулы из теории эллиптических функций Якоби.

Во втором параграфе исследуется возмущенное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x-\mu x^3=\varepsilon Y\left(x,\frac{dx}{dt},t\right), \qquad (30)$$

где ε - малый параметр, Y - некоторая голоморфная функция $x, \frac{dx}{dt}, t$.

Воспользовавшись подстановкой

$$x=c\,\mathrm{sn}\,\psi, \qquad y=c\,\mathrm{cn}\,\psi\,\mathrm{dn}\,\psi \quad \left(y=\frac{dx}{dt}\right), \qquad (31)$$

после ряда алгебраических преобразований, уравнение (30) приводится к системе

$$\frac{dc}{dt}=\frac{\varepsilon\,\mathrm{cn}\,\psi\,\mathrm{dn}\,\psi\,Y}{\sigma(1-\kappa^2\mathrm{sn}^4\psi)}, \qquad \frac{d\psi}{dt}=\sigma-\frac{\varepsilon\,\mathrm{sn}\,\psi\,Y}{\sigma c(1-\kappa^2\mathrm{sn}^4\psi)}. \qquad (32)$$

Доказывается, что $1-\kappa^2\mathrm{sn}^4\psi\neq 0$ при действительных значениях ψ. Рассмотрен пример, когда $Y=x(1+x\dot{x})$.

Проведено исследование устойчивости уравнения Дюффинга для случая стационарного резонансного режима. В качестве примера рассмотрено уравнение

$$\ddot{x} + 1,2368x - 2x^3 = 0,05\sin t . \tag{33}$$

Периодическое решение уравнения (33) получалось тремя методами: при помощи эллиптических функций, методом малого параметра и численно на ЭЦВМ. На ЭЦВМ периодическое решение уравнения (33) находилось с помощью метода Рунге-Кутта четвертого порядка. Задавались постоянным шагом, кратным числу π, просчитывалось две коррекции и затем с помощью способа хорд находилось такое начальное значение производной, чтобы получилось 2π периодическое решение. Полученное решение уточнялось посредством уменьшения шага интегрирования.

Четвертая глава находится несколько в стороне от вопросов изложенных в предыдущих главах и посвящена резонансам в линейных системах. Она содержит три параграфа, в которых находятся границы областей неустойчивости одного типа дифференциальных уравнений второго порядка с синусоидальными коэффициентами методом цепных дробей.

В параграфе I главы IУ изложены некоторые вопросы теории цепных дробей.

Во 2 параграфе следуя работам К.Г.Валеева, излагается метод цепных дробей для построения границ областей неустойчивости. Рассматривается дифференциальное уравнение вида

$$\left[1+2\mu a\cos(\theta t)+2\mu b\sin(\theta t)\right]\frac{d^2x}{dt^2}+\mu\left[c+2d\cos(\theta t)+2e\sin(\theta t)\right]\frac{dx}{dt}+ \tag{34}$$

$$+\left[\lambda+2\mu f\cos(\theta t)+2\mu g\sin(\theta t)\right]x=0.$$

Для уравнения (34) получают уравнения для определения границ нулевой, γ - ой областей неустойчивости

$$f_1(\omega)\,w(0)+f_0(0)+f_{-1}(-\omega)\,v(0)=0, \tag{35}$$

$$\left|a_\gamma(\lambda,\mu)\right|^2=\left|b_\gamma(\lambda,\mu)\right|^2.$$

В уравнениях (35) $f_1(\omega), f_0(0), f_{-1}(-\omega)$ - некоторые функции устанавливающие соотношение между коэффициентами решения уравнения (34), $w(0), v(0)$ непрерывные дроби

$$\omega=\theta i,\quad a_\gamma(\lambda,\mu)=f_0(0{,}5\gamma\omega)-w_\infty(0{,}5\gamma\omega)-v_{\gamma-2}(0{,}5\gamma\omega),$$

$$b_\gamma(\lambda,\mu)\left[\Delta_{\gamma-2}\big((0{,}5\gamma-1)\omega\big)\right]^{-1}\prod_{k=0}^{\gamma-1}f_1\big((0{,}5\gamma-k)\omega\big).$$

В параграфе 3 области неустойчивости строятся для случая, когда коэффициенты дифференциального уравнения содержат синусы и косинусы разных гармоник. Рассмотрено дифференциальное уравнение

$$\left[1+2\mu a_1\cos(\theta t)+2\mu b_1\sin(\theta t)\right]\frac{d^2x}{dt^2}+\mu\left[c_1+2d_1\cos(\theta t)+2e_1\sin(\theta t)\right]\frac{dx}{dt}+ \tag{36}$$

$$+\left[\lambda_1+2\mu f_1\cos(\theta t)+2\mu g_1\sin(\theta t)+2\mu^2k_1\cos(2\theta t)+2\mu^2\ell_1\sin(2\theta t)\right]x=0.$$

С помощью специальной замены переменных уравнение (36) приводится к виду (34). Приведены формулы, устанавливающие соотношения между коэффициентами уравнения (36) и (34).

Вышеизложенным приемом с помощью метода цепных дробей построены границы областей неустойчивости для уравнения, которое рассматривалось Якуповым И.Я.:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\lambda + 2\mu\cos 2t + 2\mu^2\cos 4t)x = 0.$$

Рассматривается дифференциальное уравнение невозмущенного движения лопасти вертолета

$$\frac{d^2\beta}{d\psi^2} + \gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\mu\sin\psi\right)\frac{d\beta}{d\psi} + \Big[1 + \gamma\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\mu\sin\psi\right)\mu\cos\psi + \tag{37}$$
$$+ \gamma k\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\mu\sin\psi + \frac{1}{2}\mu^2\sin^2\psi\right)\Big]\beta = 0,$$

где β – угол взмаха лопасти, ψ – угол азимута лопасти, μ – характеристика режима полета, γ – массовая характеристика лопасти, k – коэффициент регулятора шага. Уравнение (37) приведено к виду (34).

При возрастании μ в уравнении (34) при $a \neq 0$ или $b \neq 0$ возникают вычислительные трудности. Применяя асимптотический способ построения областей неустойчивости предложенный К.Г.Валеевым исследуются предельные положения границ областей неустойчивости.

Рассматривается уравнение движения спутника по эллиптической орбите

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} - \frac{2e\sin\tau}{1+e\cos\tau}\,\frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{3}{1+e\cos\tau}\cdot\frac{B-C}{A}\,\varphi = 0. \qquad (38)$$

В работе [I] области неустойчивости решений уравнения (38) находились построением матрицы монодромии на ЭЦВМ. Отмечались большие трудности если значения близки к I. Следует отметить, что области неустойчивости построены только для $e = 0,9$.

Вопрос об устойчивости решений уравнения (38) исследуется методом цепных дробей. При изменении поведения граничных кривых уравнения (38) при $e \to 1$ используется отмеченный асимптотический способ. На рис. I отмечены области неустойчивости в пространстве параметров $e, \lambda_i = \frac{B-C}{A}$.

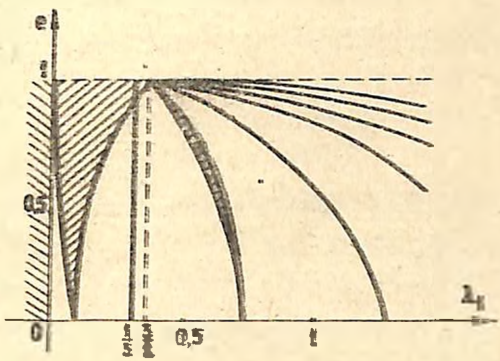

Рис. I.

7. До питання про зв"язки спеціальних функцій Ляпунова. Журнал "Доповіді АН УРСР", сер. А, № 10, 1974.

Литература.

1. Schieher W., Über die Lagestabilisierung künstliher Sattelitten auf elliptishen Bahnen. Stutgart. 1966. (Diss).

БФ 16747. Подписано к печати 24.I 1975 г. Формат бумаги 60х84/16. 1,5 физ.печ.л. Зак. 100. Тираж 230. Бумага № 3.

Типография РИО КИИГА. Киев, пр. Космонавта Комарова, 1.