МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР
КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМЕНИ А.М.ГОРЬКОГО

На правах рукописи

АЛЕКСЕЕВА Светлана Ивановна

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С БЫСТРО МЕНЯЮЩИМИСЯ РЕШЕНИЯМИ

Диссертация написана на русском языке

/01.01.03 - дифференциальные и интегральные уравнения/

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев - 1974

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМЕНИ А. М. ГОРЬКОГО

На правах рукописи

АЛЕКСЕЕВА Светлана Ивановна

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С БЫСТРО МЕНЯЮЩИМИСЯ РЕШЕНИЯМИ

Диссертация написана на русском языке

/01.01.03 - дифференциальные и интегральные уравнения/

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико - математических наук

Киев - 1974

Работа выполнена на кафедре высшей математики Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького.

Научный руководитель - доктор физико-математических наук ОСТАПЕНКО В.Н.

Официальные оппоненты:

1. Доктор физико-математических наук, профессор БЕЛОНОСОВ С.М.
2. Кандидат физико-математических наук, доцент БАРАНОВСКАЯ Г.Г.

Ведущее предприятие - ордена Трудового Красного Знамени институт математики АН УССР.

Автореферат разослан " " . . . . 1974 г.

Защита диссертации " " состоится . . . . 1974 г.
на заседании Ученого Совета по присуждению ученых степеней физико-математического факультета Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького / в 14-оо ауд.431/

Отзывы на автореферат и замечания просим прислать по адресу: Киев - 30, ул. Пирогова, 9, Научная часть.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Киевского пединститута.

Ученый секретарь Совета доц. ТЫЧИНА И.И.

Проблема решения систем дифференциальных уравнений с параметром при части производных является одной из важных в теории дифференциальных уравнений.

К необходимости решения таких систем уравнений приводят различные прикладные задачи, в частности, рассмотрение работы интегральных схем, в которых за счет введения так называемых "паразитных" элементов, возникают быстропротекающие возмущения.

В линеаризованной постановке эта задача сводится к системе линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = A_{11}(t)x_1 + A_{12}(t)x_2 + b_1(t), \qquad /1/$$

$$\lambda \frac{dx_2}{dt} = A_{21}(t)x_1 + A_{22}(t)x_2 + b_2(t),$$

где $x_1 = (x_{11}, \ldots, x_{1n})$ – вектор основных токов и напряжений,
$x_2 = (x_{21}, \ldots, x_{2m})$ – вектор возмущающих токов и напряжений, фундаментальные решения которой содержат функции различного порядка роста, если такое упорядочение произвести по сравнению с функцией $e^{\lambda(t)}$, $\lambda(t)$ – монотонная функция.

Задачи типа /1/ имеют малый характерный размер со всеми вытекающими из этого трудностями нахождения приближенного решения.

Исследованием систем типа /I/ занимались А.Н. Тихонов, И.М. Градштейн, В.Н.Волосов, В.Р.Вазов, Н.Левинсон и другие отечественные и зарубежные математики.

Как следует из этих работ, решение системы /I/ /в предположении, что все решения – убывающие по абсолютной величине к нулю функции/ при $\lambda \to 0$, стремится к решению вырожденной системы.

К решению систем типа /I/ широко применяются асимптотические методы. Этими вопросами занимались А.В.Васильева, Вишик и Люстерник, К.В.Задирака, С.Ф.Фещенко, Н.И.Шкиль.

В отличие от этих методов, требующих существенного увеличения интервала интегрирования $\left(0, \frac{T}{\varepsilon}\right)$, в диссертации рассматривается метод, который не требует увеличения интервала интегрирования и дает возможность производить интегрирование в обычном масштабе времени.

Работа состоит из введения и трех глав, объединяющих 10 параграфов.

Во введении в первом параграфе, исходя из физических соображений и законов электротехники, выясняется общий вид системы уравнений /1/, описывающих работу электронной цепи.

Во втором параграфе дан краткий обзор работ, посвященных исследованию и построению решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных, изложены основные результаты, полученные в работе.

В первой главе рассмотрены вопросы исследования решений исходной системы /1/ и сопряженной к соответствующей ей однородной системе и получения соответствующих оценок.

В третьем параграфе алгоритм, используемого в дальнейшем метода, иллюстрируется на системах с постоянными коэффициентами и сводящихся к ним. При этом нет необходимости предварительного исследования матрицы, весьма трудоемкой процедуры.

В следующем, четвертом, параграфе для установления того факта, что фундаментальные решения системы /1/ содержат функции различного порядка роста, во-первых, доказывается, что система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 ,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 \qquad /2/$$

сводятся к системе двух линейных дифференциальных уравнений, определяющих сферическую норму вектора решения исходной системы,

$$\frac{du}{dt} = \lambda_1(t)u + \mu_1(t)v ,$$

$$\frac{dv}{dt} = \mu_2(t)u + \lambda_2(t)v , \qquad /3/$$

где

$$u(t) = (x_1(t), x_1(t))^{1/2} ,$$

$$v(t) = (x_2(t), x_2(t))^{1/2} , \qquad /4/$$

$$\underline{\lambda}_1(t) < \lambda_1(t) < \overline{\lambda}_1(t) \quad , \quad \underline{\lambda}_2(t) < \lambda_2(t) < \overline{\lambda}_2(t) \qquad /5/$$

$\underline{\lambda}_1(t), \overline{\lambda}_1(t)$ и $\underline{\lambda}_2(t), \overline{\lambda}_2(t)$ соответственно наименьшее и наибольшее собственные числа матриц $\frac{a_{11}(t)+a_{11}^*(t)}{2}$, $\frac{a_{22}(t)+a_{22}^*(t)}{2}$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ – функции, удовлетворяющие неравенствам

$$\begin{gathered} -\|a_{12}(t)\| \le \mu_1(t) \le \|a_{12}(t)\|, \\ -\|a_{21}(t)\| \le \mu_2(t) \le \|a_{21}(t)\|. \end{gathered} \qquad /6/$$

Во-вторых, особым приемом эта система /3/ приводится к форме, допускающей интегрирование, при этом вводится новая функция $\sigma(t)$

$$\sigma'(t) = \rho(t),$$

удовлетворяющая уравнению Риккати

$$\rho' - \left[\frac{\mu_2'(t)}{\mu_2(t)} - \Lambda(t)\mu_2(t)\right]\rho - \rho^2 + \mu_1(t)\mu_2(t) = 0.$$

Необходимые для дальнейшего свойства функции $\sigma(t)$ определяются в следующем параграфе.

Таким образом, находится общее решение системы /3/

$$\begin{gathered} v(t) = e^{\int_0^t \lambda_1(\tau)d\tau} v_1(t), \\ u(t) = e^{\int_0^t \lambda_2(\tau)d\tau} u_1(t), \end{gathered} \qquad /7/$$

где

$$v_1(t) = C_2 e^{\lambda(t)+\sigma(t)} + C_3 e^{\lambda(t)+\sigma(t)} \int_0^t \mu_2(\tau) e^{-\lambda(\tau)} d\tau, \qquad /8/$$

$$u_1(t) = C_3\left[1 + \int_0^t \mu_1(\tau) e^{\lambda(\tau)+\sigma(\tau)} \int_0^{\tau} \mu_2(\tau_1) e^{-\lambda(\tau_1)} d\tau_1 d\tau\right] + C_2 \int_0^t \mu_1(\tau) e^{\lambda(\tau)+\sigma(\tau)} d\tau. \qquad /9/$$

В пятом параграфе, полученное таким образом решение, применяется к исследованию свойств решений однородной системы, соответствующей системе /I/, представленной в виде

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \delta a_{21}(t)x_1 + \delta a_{22}(t)x_2, \qquad /10/$$

где

$a_{11}(t)=A_{11}(t)$, $a_{12}(t)=A_{12}(t)$, $a_{21}(t)=\frac{1}{\delta}\mathcal{L}^{-1}A_{21}(t)$, $a_{22}(t)=\frac{1}{\delta}\mathcal{L}^{-1}A_{22}(t)$, $\delta=\|\mathcal{L}^{-1}\|$

и сопряженной к ней системе

$$\frac{d\xi_1}{dt} + a_{11}^*(t)\xi_1 + \delta a_{21}^*(t)\xi_2 = 0,$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} + a_{12}^*(t)\xi_1 + \delta a_{22}^*(t)\xi_2 = 0. \qquad /11/$$

Здесь же показано, что функция $\sigma(t)$ является ограниченной функцией для $t \in (0,\infty)$.

Для систем /10/ и /11/, согласно /8/, /9/, имеем

$$v_1(t) = C_2\, e^{\vartheta(t,\delta)+\sigma(t,\delta)} + C_3\delta e^{\vartheta(t,\delta)+\sigma(t,\delta)}\int_0^t \mu_2(\tau)\, e^{-\vartheta(\tau,\delta)}d\tau, \qquad /12/$$

$$u_1(t) = C_3\left[1 - \delta\int_0^t \mu_1(\tau)e^{\vartheta(\tau,\delta)+\sigma(\tau,\delta)}\int_0^{\tau}\mu_2(\tau_1)\, e^{-\vartheta(\tau_1,\delta)}d\tau_1\, d\tau\right] + \qquad /13/$$

$$+ C_2\int_0^t \mu_1(\tau)e^{\vartheta(\tau,\delta)+\sigma(\tau,\delta)}d\tau$$

$$\vartheta_1(t) = C_2 e^{\vartheta^*(t,\delta)+\sigma^*(t,\delta)} + C_3 e^{\vartheta^*(t,\delta)+\sigma^*(t,\delta)} \int_0^t \mu_1^*(\tau) e^{-\vartheta^*(\tau,\delta)} d\tau , \qquad /14/$$

$$\omega_1(t) = C_3 \Big[1 - \delta \int_0^t \mu_2^*(\tau) e^{\vartheta^*(\tau,\delta)+\sigma^*(\tau,\delta)} \int_0^{\tau} \mu_1^*(\tau_1) e^{-\vartheta^*(\tau_1,\delta)} d\tau_1 d\tau \Big] +$$
$$+ C_2 \delta \int_0^t \mu_2^*(\tau) e^{\vartheta^*(\tau,\delta)+\sigma^*(\tau,\delta)} d\tau \qquad /15/$$

Далее показано, что при $\lambda_2(t)>0$ и таком δ, что $\vartheta^*(t,\delta)+\sigma^*(t,\delta)$ представляет собой монотонно возрастающую функцию, решения $\vartheta_1(t)$, $\omega_1(t)$ /формулы /14/,/15/ / представляются в виде

$$\vartheta_1(t) = C_2^* e^{\vartheta^*(t,\delta)+\sigma^*(t,\delta)} - C_3 e^{\sigma^*(t,\delta)} \varphi(t), \qquad /16/$$

$$\omega_1(t) = C_2^* \delta \int_0^t \mu_2^*(\tau) e^{\vartheta^*(\tau,\delta)+\sigma^*(\tau,\delta)} d\tau + C_3 \Big[1 - \delta \int_0^t \mu_2^*(\tau) \varphi(\tau) e^{\sigma^*(\tau,\delta)} d\tau \Big], \qquad /17/$$

где $C_2^* = C_2 + \beta C_3$,

$$\beta = \int_0^{\infty} \mu_1^*(\tau) e^{-\vartheta^*(\tau)} d\tau \le A < \infty , \quad \varphi(t) = \int_t^{\infty} \mu_1^*(\tau) e^{-[\vartheta^*(\tau,\delta)-\vartheta^*(t,\delta)]} d\tau \qquad /18/$$

Если порядок роста функции $f(t)$ определить функцией $e^{x(t)}$ такой, что

$$f(t) = \varphi(t) e^{x(t)}, \qquad /19/$$

где $\varphi(t)$ – ограниченная на интервале $(0,\infty)$ функция, а $x(t)$ –монотонная функция, то коэффициенты при C_2^*, C_3 имеют различный порядок роста.

При $\lambda_2(t)<0$ и таком δ, что $\vartheta(t,\delta)+\sigma(t,\delta)<0$ являются монотонно -убывающей функцией /формулы /12/,/13/ /

$$\vartheta_1(t) = C_2 e^{\vartheta(t,\delta)+\sigma(t,\delta)} + C_3 q(t) \Big[e^{\sigma(t,\delta)} - e^{\vartheta(t,\delta)+\sigma(t,\delta)} \Big] \qquad /20/$$

$$u_1(t) = C_3 \left[1 + \delta \int_0^t \mu_1(\tau) g(\tau) e^{\sigma(\tau,\delta)} - \delta \int_\delta^t \mu_1(\tau) g(\tau) e^{\nu(\tau,\delta)+\sigma(\tau,\delta)} d\tau \right] + C_2 \int_0^t \mu_2(\tau) e^{\nu(\tau,\delta)+\sigma(\tau,\delta)} d\tau, \qquad /21/$$

где

$$g(t) = -\frac{\mu_2(t)}{\nu'(t)}.$$

Таким образом, решения $u_1(t)$ и $v_1(t)$ и в этом случае содержат функции с различным порядком убывания. При этом оказывается, что только для сопряженной системы /II/ соответствующим выбором начальных условий можно отделить быстрорастущее решение.

Относительно решений системы /II/ имеет место следующая теорема.

<u>ТЕОРЕМА I.</u> Если на интервале $(0,\infty)$ выполняются условия:

1/ нормы матриц $-a_{12}^*(t), -a_{21}^*(t)$ и все собственные числа матриц $-a_{11}^*(t)$, $-a_{22}^*(t)$ ограничены величинами, не зависящими от δ,

2/ для всех собственных чисел $\lambda_{1i}^*(t)$ матрицы $-a_{11}^*(t)$ и $\lambda_{2j}^*(t)$ матрицы $-\delta a_{22}^*(t)$ имеют место неравенства

$$\lambda_{1i}^* > 0, \qquad |\bar\lambda_1(t) - \lambda_{1i}^*| < \Delta_1, \quad i = \overline{1,n},$$
$$\lambda_{2j}^* > 0, \qquad |\bar\lambda_2(t) - \lambda_{2j}^*| < \Delta_2, \quad j = \overline{1,m}, \qquad /22/$$
$$||\bar\lambda_1| - |\lambda_2|| = d \gg \Delta_1 + \Delta_2,$$

то при достаточно больших d и малых Δ_i, $i = 1,2$ для каждой компоненты вектора $\vartheta(t)$ имеет место оценка

$$|\xi_{2j}(t)| \le C_1 |\psi_1(t)| e^{\int_\delta^t \bar\lambda_1(\tau)d\tau + \sigma(t)} + \delta C_2 |\psi_2(t)| e^{\int_\delta^t \bar\lambda_2(\tau)d\tau + \sigma(t)}, \qquad /23/$$

где

$$|\psi_1(t)| \le |\psi_1^*(t)|\, e^{\Delta_1(t)},$$

$$|\psi_2(t)| \le |\psi_2^*(t)|\, e^{\Delta_2(t)},$$

$\psi_1^*(t), \psi_2^*(t)$ – некоторые функции, ограниченные на интервале $(0, \infty)$.

Вопросы построения решений системы /II/, не содержащих быстроизменяющихся функций, рассмотрены во второй главе.

В шестом параграфе система /II/ сводится к системе интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{d\xi_1}{dt} = a_{11}^*(t)\xi_1 - \delta a_{21}^*(t) z_2(t) \int_t^\infty z_2^{-1}(\tau) a_{12}^*(\tau) \xi_1(\tau) d\tau,$$

$$\xi_2(t) = -z_2(t) \int_t^\infty z_2^{-1}(\tau) a_{12}^*(\tau) \xi_1(\tau) d\tau, \qquad /24/$$

где $z_2(t)$ – фундаментальная матрица уравнения

$$\frac{dz_2}{dt} + \delta a_{22}^*(t) z_2 = 0. \qquad /25/$$

Эта система эквивалентна системе /II/ лишь при определенном выборе начальных условий.

Предположив, что матрица $z_2(t)$ и обратная ей представлены в виде

$$z_2(t) = \bar{w}_2(t)\, e^{\delta \Lambda_2(t)},$$

$$z_2^{-1}(t) = e^{-\delta \Lambda_2(t)} \bar{w}_2^{-1}(t), \qquad /26/$$

где элементы матриц $\bar{w}_2(t)$, $\bar{w}_2^{-1}(t)$ – ограничены,

$$e^{\delta \Lambda_2(t)} = \left[e^{\delta \int_0^t \lambda_{21}^*(\tau) d\tau}, \ldots, e^{\delta \int_0^t \lambda_{2m}^*(\tau) d\tau} \right], \qquad /27/$$

первое уравнение системы /24/ запишем в виде

$$\frac{d\xi_1}{dt} = A(t)\xi_1 - a_{21}^*(t) \bar{w}_2(t) e^{\delta \Lambda_2(t)} \int_t^\infty e^{-\delta \Lambda_2(\tau)} [\bar{w}_2^{-1}(\tau) \psi(\tau)]' \xi_1(\tau) d\tau -$$

$$/28/$$

$$- \delta a_{21}^*(t) \bar{w}_2(t) e^{\delta \Lambda_2(t)} \int_t^\infty e^{-\delta \Lambda_2(\tau)} \bar{w}_2^{-1}(\tau) \psi(\tau) e^{\delta \Lambda_2(\tau)} \int_\tau^\infty e^{-\delta \Lambda_2(\tau_1)} \bar{w}_2^{-1}(\tau_1) a_{12}^*(\tau_1) \xi_1(\tau_1) d\tau_1 d\tau.$$

$$A(t) = a_{11}^*(t) + a_{21}^*(t)\psi(t).$$

Предполагая, что фундаментальная матрица $z_1(t)$ и обратная ей системы

$$\frac{dz_1}{dt} + A(t) z_1 = 0 \qquad /29/$$

представлены в виде

$$z_1(t) = \bar{W}_1(t) e^{\Lambda_1(t)},$$

$$z_1^{-1}(t) = e^{-\Lambda_1(t)} \bar{W}_1^{-1}(t), \qquad /30/$$

где элементы матриц $\bar{W}_1(t)$, $\bar{W}_1^{-1}(t)$ ограничены и

$$e^{\Lambda_1(t)} = \left[e^{\int_0^t \lambda_{11}^*(\tau) d\tau}, \ldots, e^{\int_0^t \lambda_{1n}^*(\tau) d\tau} \right], \qquad /31/$$

получим

$$\xi_1(t) = \bar{w}_1(t) e^{\Lambda_1(t)} \xi_1(0) - \bar{w}_1(t) e^{\Lambda_1(t)} \int_0^t e^{-\Lambda_1(\tau)} c(\tau) e^{\delta\Lambda_2(\tau)} \int_\tau^\infty e^{-\delta\Lambda_2(\tau_1)} p(\tau_1) \xi_1(\tau_1) d\tau_1 d\tau +$$

$$\cdot \delta \bar{w}_1(t) e^{\Lambda_1(t)} \int_0^t e^{-\Lambda_1(\tau)} c(\tau) e^{\delta\Lambda_2(\tau)} \int_\tau^\infty e^{-\delta\Lambda_2(\tau_1)} d(\tau_1) e^{\delta\Lambda_2(\tau_1)} \int_{\tau_1}^\infty e^{-\delta\Lambda_2(\tau_2)} q(\tau_2) \xi_1(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 d\tau. \qquad /32/$$

Применим к /32/ метод последовательных приближений

$$\xi_1^{(n+1)}(t) = \bar{w}_1(t) e^{\Lambda_1(t)} \xi_1(0) - \bar{w}_1(t) e^{\Lambda_1(t)} \int_0^t e^{-\Lambda_1(\tau)} c(\tau) e^{\delta\Lambda_2(\tau)} \int_\tau^\infty e^{-\delta\Lambda_2(\tau_1)} p(\tau_1) \xi_1^{(n)}(\tau_1) d\tau_1 d\tau -$$

$$\delta \bar{w}_1(t) e^{\Lambda_1(t)} \int_0^t e^{-\Lambda_1(\tau)} c(\tau) e^{\delta\Lambda_2(\tau)} \int_\tau^\infty e^{-\delta\Lambda_2(\tau_1)} d(\tau_1) e^{\delta\Lambda_2(\tau_1)} \int_{\tau_1}^\infty e^{-\delta\Lambda_2(\tau_2)} q(\tau_2) \xi_1^{(n)}(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 d\tau. \qquad /33/$$

Теорема 2 этого параграфа показывает, что решение новой системы не содержит быстро-растущих компонент.

<u>ТЕОРЕМА 2.</u> Если матрицы $z_1(t)$ и $z_2(t)$ представимы в виде /25/ /29/ и

$$\max_i \lambda_{2i}^* - \min_i \lambda_{2i}^* < \frac{c}{\delta}, \quad \frac{1}{\delta} = \alpha \geq \alpha^* > 0, \quad i = \overline{1,m}, \qquad /34/$$

то итерационный процесс /33/ сходится и при том к решению, имеющему порядок роста $e^{\|\Lambda_1(t)\| + \varepsilon}$.

Таким образом, если $\delta \|\Lambda_2(t)\| \gg \|\Lambda_1(t)\| + \varepsilon$, то характерный размер для системы /24/ значительно увеличится.

Полученные таким образом решения подставляются в сопряженную систему /11/ и тем самым понижается ее порядок, и новая система может быть проинтегрирована обычными методами.

Подставляя значение

$$z_2(t) = W_2(t)\, e^{\delta \int \lambda_2(t)dt}\;, \quad W_2(t) = \bar{W}_2(t)\, e^{\delta[\lambda_2(t) \cdot \int_0^t \lambda_2(t)dt]}$$

в уравнение /25/, получим

$$\frac{dW_2}{dt} + \delta[a_{22}^*(t) - \lambda_2(t)E]\,W_2 = 0 \qquad /35/$$

Поскольку для решения уравнения /35/ могут быть применены лишь приближенные методы, то $\lambda_2(t)$ следует выбрать так, чтобы обеспечить наибольший характерный размер задачи. Очевидно, что для этой цели функцию $\lambda_2(t)$ желательно выбрать так, чтобы на интервале интегрирования вектор

$$\xi(t) = W(t)\xi_0$$

наименьше уклонялся от постоянной.

Так как существенное влияние на быстроту роста решения системы /24/ оказывает функция $\lambda(t)$, то вопрос выбора этой функции, а также дальнейшая схема решения задачи рассматривается в седьмом параграфе.

Для всякого вектора ξ_0 имеет место соотношение:

$$(W\xi_0, W\xi_0) = (\xi_0, \xi_0)\, e^{-\delta \int_0^t ([a_{22}^*(\tau) + a_{22}(\tau) - 2\lambda(\tau)E]\,\zeta, \zeta)\,d\tau}\;,$$

где $\zeta = \zeta(t)$ - некоторый вектор единичной длины.

Величина $\lambda(t)$, минимизирующая величину

$$\int_0^t ([a_{22}^*(\tau) + a_{22}(\tau) - 2\lambda(\tau)E]\,\zeta, \zeta)\,d\tau\;,$$

выберем в соответствии с теоремой:

ТЕОРЕМА 3. Наименьшее значение интеграла по поверхности единичной сферы от функции $([A(t) + A^*(t) - 2\lambda(t)E]\,\zeta, \zeta)^2$ достигается при

$$\lambda(t) = sp\,\frac{A^*(t) + A(t)}{2N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(t) \qquad /36/$$

Таким образом, система /24/ может быть представлена в виде

$$\xi_2(t) = W_2(t)\, e^{\delta \int_0^t \lambda_2(\tau)d\tau} \int_t^{\infty} W_2^{-1}(\tau)\, e^{-\delta \int_0^{\tau} \lambda_2(\tau_1)d\tau_1}\, a_{12}^*(\tau)\xi_1(\tau)d\tau\,,$$

$$\frac{d\xi_1}{dt} + a_{11}^*(t)\xi_1 + \delta a_{21}^*(t)\xi_2 = 0. \qquad /37/$$

Если

$$\frac{d\xi}{dt} + A^*(t)\xi = 0, \qquad /38/$$

то

$$(x(t), \bar{\xi}(t)) = C + \int_0^t (F(\tau), \bar{\xi}(\tau))d\tau \qquad /39/$$

является первым интегралом системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + F(t)\,, \quad x\big|_{t=0} = x_0\,, \qquad /40/$$

где $x(t)$ - вектор-функция с компонентами $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, $A(t)$ - функциональная матрица $[a_{ij}(t)]$, $i,j = \overline{1,n}$, элементы которой являются аналитическими функциями, $\bar{\xi}(t)$ - вектор, комплексно сопряженный с $\xi(t)$,

$F(t)$ - непрерывная вектор-функция.

Отсюда следует, что полученные решения сопряженной системы позволяют построить систему первых интегралов системы /I/

$$\hat{\xi}_1^*(t)x_1 + \hat{\xi}_2^*(t)x_2 = C, \qquad /4I/$$

где $(\hat{\xi}_1(t), \hat{\xi}_2'(t))$ - матрица полученных решений, или

$$x_1(t) = \hat{\xi}_1^{*-1} x_1^{(0)} - (\hat{\xi}_2\, \hat{\xi}_1^{-1})^* x_2 \qquad /42/$$

при $x_1^{(0)} = x_1(0) = C$, $x_2(0) = 0$, $\hat{\xi}_2(0) = E$.

Подставляя /42/ в систему /I/, получим

$$\frac{dx_2}{dt} = \delta[a_{22}(t) + \omega(t)]x_2 + \varphi(t). \qquad /43/$$

В этой системе заменой $z e^{\lambda(t)}$ сравнительно просто выделяется быстро меняющаяся часть, после чего система может быть проинтегрирована обычными методами.

Таким образом, задача свелась к интегрированию систем дифференциальных уравнений /37/,/43/.

Приближенные способы построения решения этих систем дифференциальных уравнений рассмотрены в т р е т ь е й главе.

Здесь же показано, что для практического решения системы/37/ нет необходимости вычислять матрицы $w_1(t)$, $w_1^{-1}(t)$, $w_2(t)$, $w_2^{-1}(t)$, так как при интегрировании в /33/ по частям получаем выражения, в которые, как сомножители, входят произведения $w_1(t)\cdot w_1^{-1}(t)$, $w_2(t)\cdot w_2^{-1}(t)$.

В полученные системы дифференциальных уравнений входят величины

$$J_k(t) = e^{\delta\lambda(t)}\int_t^{\infty}\tau^k e^{-\delta\lambda(\tau)}d\tau\ , \qquad /44/$$

$$J_k^*(t) = e^{-\delta\lambda(t)}\int_0^t\tau^k e^{+\delta\lambda(\tau)}d\tau \qquad /45/$$

ограниченные не зависящими от δ функциями, которые наиболее просто приближенно представлять в виде сплайн-функции, если ввести замену $\lambda(\tau)=\xi$:

$$J_k(t) = \frac{1}{\delta}\Big[P_n(\xi)+\sum_i b_0(\xi-\xi_i)(\xi-\xi_i)^{\nu_i}P_{m_i}(\xi-\xi_i)\Big]\Big|_{\xi=\lambda(t)} \cdot \qquad /46/$$

$$J_k^*(t) = \frac{1}{\delta}\Big[P_n(\xi)+\sum_i b_0(\xi-\xi_i)(\xi-\xi_i)^{\nu_i}P_{m_i}(\xi-\xi_i)\Big]\Big|_{\xi=\lambda(0)}^{\xi=\lambda(t)} \qquad /47/$$

где $P_n(\xi)$, $P_{m_i}(\xi)$

$$b_0(\xi-\xi_i)=\begin{cases}1, & \text{если } \xi-\xi_i>0\\ 0, & \text{если } \xi-\xi_i<0\end{cases}$$

$\xi_i=\lambda(t_i)$ - точки нарушения аналитичности сплайна.

Представление функций /44/,/45/ в виде /46/,/47/ естественно приводит к необходимости получения решений систем дифференциальных уравнений /37/,/43/ в виде сплайнов. Сущность этого метода состоит в следующем.

Пусть матрица $A(t)=[a_{ij}(t)]$, $i,j=\overline{1,n}$ системы

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x\ ,\quad x(0)=x_0\ ,\quad t\in[0,T] \qquad /48/$$

полиномиальная сплайн - матрица, относительно которой известно:

а/ на промежутке $[t_{i-1},t_i](t_0=0)$, $i=\overline{1,m}$ элементы матрицы - полиномы степени ν_i ,

б/
$$\left.\frac{d^jA}{dt^j}\right|_{t=t_i-0}=\left.\frac{d^jA}{dt^j}\right|_{t=t_i+0}\ ,\quad j=\overline{0,k_i}\ . \qquad /49/$$

Если на промежутке $[0,t_1]$ сплайн - матрица $A(t)$ имеет форму

$$A(t)=A_0^{(1)}+A_1^{(1)}t+\frac{A_2^{(1)}}{2!}t^2+\ldots+\frac{A_{\nu_1}^{(1)}}{\nu_1!}t^{\nu_1}\ , \qquad /50/$$

где $A_i^{(1)}$, $i=\overline{0,\nu_1}$ - числовые матрицы, а вектор-функция $x(t)$ разложена в ряд

$$x(t)=x_0^{(1)}+x_1^{(1)}t+\frac{x_2^{(1)}}{2!}t^2+\ldots\ , \qquad /51/$$

то имеют место такие рекурентные соотношения:

$$x_i^{(1)}=\sum_{j=0}^{i-1}C_{i-1}^{j}A_j^{(1)}x_{i-1-j}^{(1)}\ ,\quad i=1,2,\ldots \qquad /52/$$

Аналогичные соотношения будем иметь и в том случае, когда вектор $x(t)$ и матрица $A(t)$ соответственно разложены в ряд по степеням $t-t_1$

$$b_i^{(1)}=\sum_{j=0}^{i-1}C_{i-1}^{j}B_j^{(1)}b_{i-1-j}^{(1)}\ ,\quad i=1,2,\ldots\ , \qquad /53/$$

где

$$x_1(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{b_j^{(1)}}{j!}(t-t_1)^j\ ,\quad b_0^{(1)}=x(t_1)=x_1\ , \qquad /54/$$

$$A_1(t) = \sum_{j=0}^{\nu_1} \frac{B_j^{(1)}}{j!}(t-t_1)^j \qquad /55/$$

Приближенное представление сплайн - вектора x_1 на промежутке $[0, t_1]$ ищется в виде

$$x_1(t) = a_{10} + a_{11}(t) + \frac{a_{12}}{2!}t^2 + \dots + \frac{a_{1,n_1}}{n_1!}t^{n_1} \qquad /56/$$

Пусть /56/ полином Эрмита с двумя кратными узлами $0, t_1$ с соответствующей кратностью ρ_1, τ_1, $\rho_1 + \tau_1 = n_1 + 1$. Коэффициенты a_{1j}, $j = \overline{0, \rho_1 - 1}$ находятся из условий

$$a_{10} = x_0^{(1)} = x_0, \; a_{11} = x_1^{(1)}, \dots, a_{1,\rho_1-1} = x_{\rho_1-1}^{(1)} \qquad /57/$$

Из /57/ и /52/ имеем:

$$a_{1j} = \omega_j^{(1)} x_0, \quad j = \overline{0, \rho_1 - 1}, \qquad /58/$$

где $\omega_0^{(1)} = E$, $\omega_1^{(1)} = A_0^{(1)}$, $\omega_2^{(1)} = [A_0^{(1)}]^2 - A_1^{(1)}$ матрицы, полученные из рекурентных соотношений /52/.

Остальные $n_1 - \rho_1$ коэффициентов $a_{1,\rho_1}, \dots, a_{1,n_1}$ находятся из тех соображений, чтобы

$$b_j^{(1)} = x^{(j)}(t_1), \quad j = \overline{0, \tau_1 - 1} \qquad /59/$$

Если обозначить

$$b_j^{(1)} = \Omega_j^{(1)} x_1, \quad j = \overline{0, \tau_1 - 1}, \qquad /60/$$

где матрицы $\Omega_j^{(1)}$, $j = \overline{0, \tau_1 - 1}$ получены из рекурентных соотношений /53/, то искомый полином имеет вид:

$$L_1(t) = (t-t_1)^{z_1}\sum_{k=0}^{\rho_1-1} x^{(k)}(0)\,\frac{t^k}{k!}\,\frac{(-1)^{z_1} z_1(z_1+1)\dots(z_1+\rho_1-k-1)}{t^{z_1+\rho_1-k-1}} +$$

$$+\, t^{\rho_1}\sum_{k=0}^{z_1-1} x^{(k)}(t_1)\,\frac{(t-t_1)^k}{k!}\,\frac{(-1)^{z_1-k-1}\rho_1(\rho_1+1)\dots(\rho_1+z_1-k-1)}{t_1^{\rho_1+z_1-k-1}}. \qquad /61/$$

Согласно /58/,/60/ получим

$$x_1(t) = P_1(t)x_0 + Q_1(t)x_1, \qquad /62/$$

где

$$P_1(t) = (t-t_1)^{z_1}\sum_{k=0}^{\rho_1-1}\omega_k^{(1)}\,\frac{t^k}{k!}\,\frac{(-1)^{z_1} z_1(z_1+1)\dots(z_1+\rho_1-k-2)}{t_1^{z_1+\rho_1-k-1}}, \qquad /63/$$

$$Q_1(t) = t^{\rho_1}\sum_{k=0}^{z_1-1}\Omega_k^{(1)}\,\frac{(t-t_1)^k}{k!}\,\frac{(-1)^{z_1-k-1}\rho_1(\rho_1+1)\dots(\rho_1+z_1-k-2)}{t_1^{z_1+\rho_1-k-1}}. \qquad /64/$$

Для определения величины $x_1(t_1) = x_1$, в равенство

$$x_1(t) = x_0 + \int_0^t A_1(t)x_1(t)\,dt\ , \qquad /65/$$

где $A_1(t)$ – представление сплайна $A_1(t)$ на промежутке $[0, t_1]$, подставим приближенное значение $x_1(t)$ из /62/. Получим

$$x_1 = \left[E - \int_0^{t_1} A_1(t)Q_1(t)\,dt\right]^{-1}\left[E + \int_0^{t_1} A_1(t)P_1(t)\,dt\right]x_0\ . \qquad /66/$$

Затем из /62/ получим приближенное представление сплайн – решения системы /48/ на промежутке $[0, t_1]$.

Построение полинома $x_i(t)$, представляющего сплайн $x_1(t)$ на промежутке $[t_{i-1}, t_i]$, совпадает с изложенным выше.

При этом функции и матрицы раскладываются соответственно по степеням $t-t_{i-1}$ и $t-t_i$. За начальное приближение берется найденное из предыдущего x_{i-1} :

$$x_i(t) = P_i(t)x_{i-1} + Q_i(t)x_i \, , \tag{63}$$

где

$$x_i = \left[E - \int_{t_{i-1}}^{t_i} A_i(t)Q_i(t)dt\right]^{-1}\left[E + \int_{t_{i-1}}^{t_i} A_i(t)P_i(t)dt\right]x_{i-1} \tag{64}$$

В параграфе 9 доказана сходимость изложенного процесса и даются необходимые оценки.

В последнем § 10 применяется изложенный выше метод для получения сплайн - решения систем /37/, /43/ и исходной системы /I/.

Приведенные там же примеры показывают эффективность предлагаемого метода.

Основные результаты, полученные в диссертации, были доложены на семинарах при Киевском государственном университете имени Т. Г. Шевченко, руководимым проф. Блущенко А.А., при Институте кибернетики АН УССР, руководимым проф. Ивановым И. И., при Институте электродинамики АН УССР, руководимым д.ф.м.н. Остапенко В.Н., и опубликованы в работах:

Алексеева С.И. Об одном методе решения задачи Коши для систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка, сб. "Электронное моделирование и математическая физика", "Наукова думка", К., 1972.

Алексеева С.И. Построение сплайн-решения системы линейных дифференциальных уравнений, ДАН УССР, серия А., № 12, 1973.

Алексеева С.И. Оценка погрешности одного метода решения задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с быстрорастущими решениями, сб. "Цифровое моделирование задач математической физики", "Наукова думка", К., 1974.

БК № 06042. Подписано к печати 22.02.1974 г. Формат 60 х 90/16.
Объем 1,125 и.л. Тираж 200. Заказ № 43.

Лаборатория подготовки научно-технической документации Кировоградского ОНТП ЦНИИТЭИтракторосельхозмаша. г.Кировоград, Училищный пер., 19.