

Б 36

у-р

213 р

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени А. М. ГОРЬКОГО

Г. П. БЕВЗ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ АЛГЕБРЫ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата педагогических наук
(по методике математики)

Научный руководитель — доцент Д. М. Маергойз

76



НБ НПУ



100196861

Киев — 1960

Г. П. БЕВЗ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА В ШКОЛЬНОМ
КУРСЕ АЛГЕБРЫ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата педагогических наук
(по методике математики)

Научный руководитель — доцент Д. М. Маергойз

Дис. - 100020237

Изучение доказательств в школьном курсе математики способствует лучшему усвоению программного материала, дает возможность ознакомить учащихся с методами математических доказательств, способствует развитию логического мышления учащихся.

Но, к сожалению, доказательствам не всегда уделяется достаточное внимание. Особенно недооценивают их в школьном курсе алгебры. Очень часто в алгебре материал излагают так, что учащимся трудно понять: доказательство ли это, или мотивировка правила, или просто решение примера. Иногда учителя доказывают то или иное утверждение, но не требуют, чтобы учащиеся выучили это доказательство. Наблюдаются случаи, когда учителя просто опускают предусмотренные программой доказательства. Все это приводит к тому, что учащиеся седьмых-восьмых классов думают, что в алгебре вообще нет теорем, доказательств, а выпускники средних школ считают, что в алгебре есть только одна теорема (Безу).

Недооценивает роль доказательств в школьном курсе алгебры также и наша методическая наука. О доказательствах геометрических теорем написано много статей, специальные книги, но о доказательствах утверждений школьного курса алгебры в нашей методической литературе нет почти ничего.

В диссертации исследуются особенности доказательств в школьном курсе алгебры, устанавливаются важнейшие требования, которым должны отвечать эти доказательства, анализируются доказательства многих предусмотренных программой утверждений, имеющиеся в учебниках по алгебре и наиболее распространенных методических пособиях, рассматривается методика решения алгебраических задач на доказательство.

В работе излагаются результаты исследований, проводимых автором на протяжении шести лет (1954—1959). В ней использован опыт учителей: Руденко Т. М. (Уманская СШ № 2), Корявко Т. А. (Криворожская СШ № 20), Величко Ф. Е. (Криво-

рожская СШ № 63), Железняк М. Ф. (Днепродзержинская СШ № 26), Сосиновского И. И. (Верхнячская СШРМ, Христиновский р-н, Черкасская обл.), Сидорчука И. В. (Ивангородская СШ, Христиновский р-н, Черкасская обл.), а также опыт работы автора в ряде школ Христиновского района, Черкасской области (Угловатская семилетняя, Ивангородская СШ, Верхнячская СШ, Верхнячская СШРМ) и в Криворожской СШРМ № 66. Используются также материалы наблюдений, собранные во время педагогической практики студентов Криворожского пединститута, которыми автор руководил на протяжении трех последних лет, материалы вступительных экзаменов по математике в Криворожский пединститут, а также материалы руководимого автором специального семинара по методике математики, организованном при Криворожском пединституте. Экспериментальная проверка отдельных положений диссертации осуществлялась в Киевской СШ № 22, Верхнячской СШ (Христиновский р-н, Черкасская обл.) и в Криворожской СШРМ № 66.

Диссертация состоит из краткого введения и трех глав. К работе прилагается список использованной литературы, содержащий 264 названия на русском, украинском, чешском, немецком языках.

В первой главе рассматриваются некоторые общие вопросы о доказательствах в школьном курсе алгебры. Сначала здесь раскрывается смысл понятия «доказательство», рассматривается структура доказательства.

Очень часто под доказательством понимают процесс доказывания. Но «с логической точки зрения доказательство не есть самый процесс доказывания. Доказательство есть особая логическая форма, выражающая логический результат уже состоявшегося процесса доказывания...»¹. В диссертации доказательство также рассматривается с логической точки зрения.

В каждом доказательстве различают тезис, аргументы, демонстрацию.

Тезис — это доказываемое утверждение. Часто его формулируют в виде условного суждения «если есть М, то есть и N». В связи с этим рассматриваются обратные и противоположные суждения, необходимые и достаточные условия.

Аргументы — это уже известные утверждения, используемые в доказательстве. Аргументами могут быть теоремы, аксиомы, определения. Здесь же рассматривается вопрос об аксиоматике. В школьном курсе алгебры аксиом не вводят. Роль аксиом играют

¹ В. Ф. Асмус, *Логика*, Госполитиздат, 1947, стр. 347.

здесь основные законы арифметических действий. Некоторые учителя сообщают в старших классах аксиому индукции, но от этого, конечно, курс не становится аксиоматическим.

Демонстрация — это характер логических связей между тезисом и аргументами в доказательстве. В зависимости от вида демонстрации различают способы, приемы, методы доказательства.

В диссертации рассматриваются такие методы доказательства: синтетический и аналитический, «от противного», полной индукции, математической индукции, рекуррентный метод. Обращается внимание на неправильное понимание некоторыми учителями сущности отдельных методов доказательства. Часто учителя под аналитическим методом понимают такие рассуждения, при которых делается вывод о правильности утверждения на основании того, что из этого утверждения получено правильное следствие. Очень часто в доказательствах методом «от противного» рассматривают утверждения не противоборствующие доказываемым, а противоположные. Некоторые учителя смешивают метод полной индукции с методом математической индукции. В диссертации вскрываются причины этих ошибочных взглядов, рассматриваются логические основы этих методов.

Дальше рассматриваются особенности доказательств в школьном курсе алгебры.

В большинстве случаев доказываемые утверждения в школьном курсе алгебры не называют теоремами. Чаще их формулируют в виде правил. Но правила вытекают не только из теорем, но также из определений (например, правила умножения рациональных чисел). Поэтому учащимся не всегда легко отличить доказываемые от недоказываемых утверждений. Часто доказываемые утверждения записывают в виде формул (равенств или неравенств). Но так записывают и некоторые определения, например, $a^0 = 1$; $i^2 = -1$. Это также приводит к тому, что учащиеся «доказывают» определения.

Обычно в школьном курсе алгебры под буквами понимают числа. Это в некоторых случаях облегчает формулировки утверждений, но иногда приводит к ошибкам. Часто учащиеся (да и не только они!) считают, что сумму квадратов двух чисел нельзя разложить на множители. Даже в учебнике А. П. Киселева утверждается, что «сумма одинаковых степеней двух чисел не делится на разность этих чисел». Но это неверно: $9^m + 3^m$ при любом натуральном m делится на $9 - 3$. Подобных примеров, опровергающих сформулированное в учебнике утверждение, можно привести сколько угодно.

Особенностью доказательств в школьном курсе алгебры нужно считать также наличие здесь очень многих способов, приемов, методов. Имеется в виду не только тот факт, что в алгебре встречаются некоторые методы доказательства (рекуррентный метод, метод математической индукции), которых в других школьных математических дисциплинах не рассматривают, а и то, что в алгебре одно утверждение доказывается приемом, характерным для алгебры, второе — приемом, характерным для аналитической геометрии и т. п. Объясняется это неоднородностью содержания этого курса.

В отличие от доказательств геометрических теорем, в алгебре, за исключением отдельных случаев, доказательства не сопровождаются чертежами. Поэтому доказательства в алгебре выглядят более абстрактными. Ведь доказывая, например, какую-нибудь теорему о четырехугольнике, в геометрии рисуют один четырехугольник и все доказательство ведут на примере этого одного четырехугольника. Вывод делают общий. В алгебре также некоторые утверждения доказывают на отдельных конкретных примерах, но большинство доказательств проводят в общем виде.

Приходится в школьном курсе алгебры не только доказывать, но и выводить. Задача «вывести», вообще говоря, более трудная, она включает в себе и задачу «доказать», но, кроме этого, она требует «найти» то, что надо доказать. А это иногда не легко сделать. Выводы формул рассматриваются в работе наряду с доказательствами теорем.

Анализируются в диссертации также и методы объяснения доказательств. Подробно рассматриваются конкретно-индуктивный, абстрактно-дедуктивный, генетический методы объяснения. Каждый из этих методов имеет свои преимущества и недостатки. В зависимости от изучаемого материала, возраста учащихся и других условий надо применять то один то другой метод объяснения доказательства.

В заключительном параграфе первой главы устанавливаются важнейшие требования, которым должны удовлетворять предлагаемые учащимся доказательства:

1. Доказательства должны быть правильными, они должны отвечать принципу научности обучения.

2. Доказательства должны быть доступными для учащихся данного класса.

В связи с этими вопросами уточняется сущность принципов научности и доступности обучения. Считаем, что согласно требованиям советской дидактики можно некоторые утверждения со-

проводить строгими доказательствами, для некоторых утверждений можно сообщать только идею доказательства, отдельные утверждения можно даже давать без каких-либо доказательств, но неправильно формулировать доказываемые утверждения, допускать логические или математические ошибки в доказательствах, выдавать за доказательства такие рассуждения, которые на самом деле ничего не доказывают. — нельзя.

Во второй главе диссертации анализируются доказательства важнейших утверждений алгебры, предусмотренные действующей программой по математике для средних школ. В первую очередь рассматриваются доказательства, имеющиеся в учебниках и наиболее распространенных пособиях:

1. А. Н. Барсуков, Алгебра, ч. 1 и ч. 2.
2. А. П. Киселев, Алгебра, ч. 1 и ч. 2.
3. П. С. Александров, А. Н. Колмогоров, Алгебра, ч. 1.
4. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Алгебра, ч. 1 и ч. 2.
5. В. Л. Гончаров, Начальная алгебра.

В некоторых случаях анализируются также доказательства, имеющиеся в других методических пособиях — русских, украинских и зарубежных.

Материал этой главы изложен в четырех больших параграфах, соответствующих четырем ведущим линиям школьного курса алгебры (учение о числе, тождественные преобразования, учение об уравнениях, учение о функции).

В первом из этих параграфов сначала рассматриваются обоснования правил действий над рациональными числами. После краткого анализа некоторых «доказательств» правил сложения и умножения рациональных чисел делается вывод, что строго доказать эти правила (если не вводить дополнительных определений) нельзя. В школе эти правила не доказывают. Правила вычитания рациональных чисел можно доказать. Такие доказательства есть в пособиях (3), (4). Но все же для учащихся шестых классов они недоступны. Лучше правило вычитания объяснить на конкретных примерах, как это делается в учебниках (1), (2). То же можно сказать и о правиле деления рациональных чисел.

В диссертации отмечаются следующие недостатки в изложении основных свойств действий над рациональными числами: в учебнике (1) нет единого подхода к обоснованию этих свойств. Некоторые законы доказываются, а другие остаются без каких-либо доказательств. При доказательстве некоторых законов используется «определение умножения рациональных чисел», а такого

определения в учебнике нет (есть правило умножения). Отмечается, что для положительных чисел «переместительное свойство сложения уже было доказано», но ни в арифметике ни в алгебре такого доказательства нет. Формулируются эти законы совсем не так, как в арифметике. Это место учебника нуждается в переработке.

Дальше рассматриваются доказательства теорем, изучаемых во время введения иррациональных чисел. Подробно анализируются различные доказательства теоремы о том, что не существует рационального числа, квадрат которого равен двум. Считаю, что вместо известного доказательства, имеющегося, например, в пособии (4), лучше дать более простое, вытекающее из того, что

если дробь $\frac{m}{n}$ несократима, то дробь $\frac{m \cdot m}{n \cdot n}$ также несократима.

Можно дать учащимся и более общую теорему: «если натуральное число не есть квадрат целого числа, то оно не может быть квадратом и дроби». Доказательство этой теоремы, имеющееся в учебнике (1), нужно несколько уточнить. Неверно, что числитель $m \cdot m$ имеет «только те множители, которые входят в m ». Здесь нужно иметь в виду простые множители.

Особенно много неверных доказательств предлагают учащимся при изучении комплексных чисел. Большинство учителей этот раздел излагают по учебнику (2). А здесь не все доказательства правильные. Вот как, например, доказывается здесь, что каждое мнимое число можно подать в виде произведения i на некоторое действительное число:

$$„\sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2(-1)} = b\sqrt{-1} = bi \text{ (здесь } b > 0)\text{“}.$$

Здесь без каких-либо объяснений перенесены известные теоремы о радикалах для действительных чисел на числа мнимые. Правильно равенство $\sqrt{-b^2} = bi$ ($b > 0$) и нельзя доказать, ведь $\sqrt{-b^2}$ имеет не одно, а два значения: $\pm bi$.

Неправильно доказано в учебнике (2) также условие равенства комплексного числа нулю: во второй части его допущен «порочный круг».

Неудачно изложен вопрос о вычитании комплексных чисел в учебнике (1). Здесь одно и то же равенство сначала определяется, потом доказывается. Учащиеся могут подумать, что доказывается определение.

Рассматриваются здесь и многие другие неправильные и неудачные доказательства свойств комплексных чисел, вместо них предлагаются правильные, более рациональные доказательства.

Во втором параграфе анализируются доказательства тождеств. Приведение подобных членов лучше обосновывать так, как это делается в учебнике (1). В пособии (5) обоснование недостаточно общее, в учебнике (2) по существу нет никакого обоснования. Некоторые учителя вместо доказательства равенства $20x - 15x = 5x$ сообщают учащимся аналогии: « $20\text{м} - 15\text{м} = 5\text{м}$, $20\text{ лет} - 15\text{ лет} = 5\text{ лет}$, подобно этому $20x - 15x = 5x$ ». Это приводит к тому, что учащиеся под буквами понимают не числа, а наименования. Так объяснять приведенные подобные члены нельзя.

Дальше рассматриваются различные варианты обоснования правила умножения многочленов. Вполне приемлемое объяснение этого правила есть в учебнике (1), хотя записывать его лучше в виде цепочки равенств, а не последовательности выражений; объяснение этого правила, имеющееся в пособии (5), можно было бы давать учащимся только в том случае, когда бы они предыдущий материал изучали также по этой книге.

Доказательства формул сокращенно умножения, имеющиеся в учебниках (1), (2), вполне строгие и доступные учащимся. Но все же их лучше излагать в несколько иной последовательности. Считаем, что первой нужно рассматривать не «квадрат суммы», а «произведение суммы двух чисел на их разность». Это позволит лучше раскрыть содержание понятия «формулы сокращенного умножения», естественней показать целесообразность изучения этих формул. Считаем также, что не следует требовать от учащихся заучивать формулы «квадрат разности» и «куб разности». Но нужно подчеркнуть, что в формулах $(a + b)^2$ и $(a + b)^3$ числа a и b могут быть и отрицательными. Это не снизит уровня знаний учащихся, а наоборот, повысит его. Принято считать, что лучшему усвоению формул сокращенного умножения способствуют различные геометрические интерпретации их. Но наблюдения показывают, что это не так. Учащимся труднее даются геометрические иллюстрации, чем формулы, и забывают они эти иллюстрации быстрее, чем формулы. Поэтому очень увлекаться этими иллюстрациями не следует. Нельзя подменять доказательства формул рассмотрением геометрических фигур, так как из них вытекает справедливость формул только для положительных значений букв, а не для любых рациональных.

Алгебраические дроби в школе излагаются несколько иначе, чем в научных курсах. В строгих учебниках элементарной алгебры правила сложения и умножения обычно вводят по определению, а в большинстве методических пособий, например (3), (4), эти правила доказываются. Объясняется это тем, что семиклас-

стики под буквами понимают только числа, поэтому они отождествляют алгебраические дроби с их числовыми значениями. В учебнике (1) некоторые свойства алгебраических дробей доказываются, некоторые иллюстрируются примерами, а некоторые формулируются без каких-либо объяснений. Учащимся не понятно, можно ли доказать правило умножения алгебраических дробей, или оно, как и правило умножения рациональных чисел, вытекает из определения. Считаем, что в более подготовленных классах этот вопрос можно изложить так, как это делается в пособиях (3) или (4), в менее подготовленных классах наилучше правило умножения алгебраических дробей давать по учебнику (2).

Теоремы о радикалах многие учителя доказывают так, как это делается в учебнике (2), но некоторые предлагают иные доказательства. Иногда еще учителя возводят обе части доказываемого равенства в n -ую степень и, получив правильное равенство, делают вывод, что и доказываемое равенство правильное. Такие рассуждения строги только в том случае, если предварительно доказать, что при положительных x и y из равенства $x^n = y^n$ следует $x = y$.

Некоторые методисты (П. А. Буданцев и др.) считают, что восьмиклассникам, вместо имеющих в учебниках теорем о радикалах, нужно давать более общие, верные не только для положительных a, b, c , но и для отрицательных. Опыт показывает, что такие теоремы и их доказательства недоступны для многих учащихся.

В третьем параграфе рассматриваются доказательства свойств уравнений.

Опыт показывает, что доказательства теорем об эквивалентности уравнений, имеющиеся в учебнике (2) и пособиях (3), (4), многим семиклассникам недоступны. Лучше разъяснить их на примерах, как это делается в учебнике (1). Некоторые методисты считают, что если учитель не доказывает строго теоремы об эквивалентности уравнений, значит нарушает принцип научности обучения. Но это неверно.

Решение систем уравнений в учебнике (2) изложено догматически. В учебнике (1) рассматриваются некоторые вопросы теории эквивалентности систем уравнений. Но в формулировке и обосновании имеющих здесь теорем есть ошибки. В учебнике написано, что эти теоремы «остаются справедливыми и для систем уравнений с тремя (и более) неизвестными». На самом же деле для систем уравнений с тремя (и более) неизвестными эти теоремы нужно формулировать иначе. В диссертации даются правиль-

ные формулировки этих теорем. Предлагается также изменить последовательность изучения этого материала: сначала рассмотреть графический способ решения систем, а потом уже объяснять теоремы об эквивалентности систем. Те формулировки и доказательства теорем об эквивалентности систем уравнений, которые предлагает П. А. Буданцев, семиклассникам недоступны.

Формулы для решения квадратных уравнений можно вывести многими способами. В диссертации анализируются различные способы. Сейчас учителя требуют, чтобы учащиеся помнили две или даже три формулы для решения полных квадратных уравнений. Опыт показывает, что если учащимся давать три формулы, то уже через год-два они не помнят хорошо ни одной, если же давать только одну формулу, они ее долго помнят и ошибок при решении уравнений допускают меньше. В большинстве зарубежных школ учащимся дают только одну формулу. Считаю, что учащиеся должны запомнить только одну формулу для решения уравнения общего вида. Выводить ее лучше так. Умножив обе части данного уравнения на $4a$ и сделав известные преобразования, получаем:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Если $b^2 - 4ac \geq 0$, то

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \text{ и т. д.}$$

Если $b^2 - 4ac < 0$, то уравнение не имеет решений.

Рассматриваются здесь также доказательства свойств уравнений высших степеней, уточняются формулировки, анализируются различные доказательства теоремы Безу и вытекающих из нее следствий о делимости многочлена $f(x)$ на $x - a$, рассматривается также доказательство теоремы о целых решениях уравнения с целыми коэффициентами.

В последнем параграфе второй главы рассматриваются доказательства свойств функций.

В учебнике (2) и многих методических пособиях предлагается неполное доказательство теоремы о графике функции $y = ax + b$: рассматриваются только положительные значения a и x . Полное доказательство изложить восьмиклассникам за отведенное программой время нельзя. Кроме того, доказываемое утверждение учащимся известно еще с седьмого класса. Считаю, что вполне возможно в восьмом классе не рассматривать доказательство этой теоремы.

Свойства функций можно выводить двумя способами: анали-

тически и графически. На примере квадратичной функции показывается, как это можно делать тем и другим способом.

Подробно анализируются в диссертации доказательства свойств показательной и логарифмической функций. В учебнике (2) неправильно доказано, что при основании, большем единицы, показательная функция возрастает. Здесь не рассмотрены случаи, когда значения x (одно или оба) отрицательны. Кроме того, многое непонятно в заключительной части доказательства, где рассматриваются действительные значения x . В «Методике преподавания математики» С. Е. Ляпина и др. вторая часть доказательства этого свойства лишняя. Считаю, что это свойство лучше доказывать так:

Если $a > 1$ и $x_2 > x_1$, то

$$\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} = a^{x_2 - x_1} > 1, \text{ следовательно } a^{x_2} > a^{x_1}.$$

Неправильно доказано в учебнике (2), что при основании, большем единицы, большему числу соответствует и больший логарифм. Здесь вместо сформулированного утверждения доказано обратное. Неудачно доказано в учебнике также, что при основании, большем единицы, логарифмы чисел, больших единицы, положительны, а логарифмы чисел, меньших единицы, отрицательны. Есть ошибки в формулировках и доказательствах свойств десятичных логарифмов. В диссертации вскрываются эти ошибки, предлагаются другие формулировки и доказательства.

В курсе алгебры средней школы с доказательствами имеют дело не только при изучении вопросов теории, но также и при решении задач на доказательство. Решение алгебраических задач на доказательство способствует лучшему усвоению программного материала, развитию логического мышления учащихся, дает возможность не только изучать доказательства, но и самостоятельно находить их. Задачи на доказательство нужно решать не только в геометрии, но и в алгебре. Методика решения алгебраических задач на доказательство в средней школе рассматривается в третьем разделе диссертации.

Вопрос об алгебраических задачах на доказательство не новый, его рассматривали С. Е. Ляпин, Д. М. Маергойз, П. В. Стратилатов и др. В 1954 г. И. В. Баранова защитила диссертацию «Задачи на доказательство по алгебре». Во всех этих работах доказывается целесообразность решения таких задач в школе, приводится некоторое число задач и их решения. Но методика

решения таких задач, особенно в старших классах средней школы, остается не разработанной. Многие авторы отмечают, что учителя не решают этих задач потому, что их нет в стабильных задачниках. Это было правильно по отношению старых задачников М. А. Шапошникова и М. К. Вальцова. В задачниках П. А. Ларичева их есть много.

Но все же и сейчас некоторые учителя не решают с учащимися алгебраических задач на доказательство. Некоторые отмечают, что об этих задачах ничего не сказано в программе, многие считают их очень трудными, недоступными для учащихся, но главная причина — традиция. Оказывается также, что отдельные учителя и сами не умеют решать задачи на доказательство, даже имеющиеся в сборниках П. А. Ларичева.

После рассмотрения некоторых общих вопросов методики решения задач на доказательство по алгебре (разъяснение условий, оформление решений и т. п.) рассматривается методика решения этих задач в отдельных классах. Считаем, что начинать решать их можно уже в VI классе во время изучения простейших тождественных преобразований многочленов. Первой можно решить такую задачу: доказать, что сумма трех последовательных целых чисел делится на 3. Перед тем, как сформулировать эту задачу, целесообразно предложить учащимся написать три любых последовательных целых чисел, найти их сумму и проверить, делится ли она на 3. Когда учащиеся задумаются, всегда ли сумма трех последовательных целых чисел делится на 3, можно предложить решить задачу. В диссертации подробно рассматриваются различные варианты решения этой задачи.

В следующих параграфах анализируются преимущественно задачи на доказательство, имеющиеся в стабильных задачниках П. А. Ларичева. Очень часто в методических пособиях даются неправильные, нерациональные решения. В диссертации вскрываются ошибки, недостатки этих решений, предлагаются другие решения этих задач.

Рассматриваются здесь и некоторые задачи, составленные автором.

Выводы

1. В школьном курсе алгебры есть много утверждений. Их не всегда называют теоремами, а чаще правилами, формулами, свойствами. Но их, как и теоремы, нужно доказывать. Однако наблюдаются случаи недооценки доказательств в курсе алгебры. Учителя иногда совсем опускают доказательства предусмотренных программой утверждений, а иногда, хотя и доказывают их,

по не требуют, чтобы учащиеся знали эти доказательства. Этим и объясняется тот факт, что учащиеся часто и не смотрят в учебник алгебры, изучают ее только по задачку.

2. Каждое предлагаемое учащимся доказательство должно удовлетворять принципам научности и доступности обучения. Нельзя предлагать учащимся заучивать неправильные формулировки теорем, допускать в доказательствах математические или логические ошибки, выдавать за доказательства те рассуждения, которые на самом деле ничего не доказывают. Нельзя также предлагать учащимся и недоступные для них доказательства.

В большинстве случаев учителя придерживаются принципов научности и доступности обучения, но встречаются и нарушения их.

3. В учебнике алгебры А. Н. Барсукова для VI—VII классов в основном предлагаются правильные и доступные доказательства. Исключение составляют доказательства (и формулировки) некоторых законов действий над рациональными числами и теорем об эквивалентности систем уравнений.

4. В учебниках А. П. Киселева некоторых предусмотренных программой утверждений совсем нет, многие доказательства изложены неудачно, есть здесь и грубые ошибки. Этот учебник не отвечает современным требованиям, его нужно заменить.

5. Новые пробные учебники алгебры для VIII—X классов А. Н. Барсукова и авторского коллектива под редакцией А. И. Маркушевича также во многих случаях не отвечают требованиям школы. В первом из этих учебников предлагается (особенно для VIII класса) очень много теорем. Все эти теоремы изучить нельзя за отведенное программой время, а выпустить некоторые из них — значит, надо изменять доказательства и других теорем. Во втором учебнике многие доказательства доступны только для очень сильных учащихся.

6. Авторы многих методических пособий предлагают доказывать в школе и некоторые не предусмотренные программой теоремы. С их предложениями нельзя согласиться. Действующая программа очень перегружена, из нее нужно даже выбросить некоторые второстепенные вопросы. Считаем, что вполне возможно не предлагать учащимся учить некоторые дублирующие формулы сокращенного умножения, некоторые формулы для решения квадратных уравнений и др.

7. Рассматривают учащиеся доказательства не только при изучении вопросов теории, но также и при решении задач на доказательство. Раньше в алгебре этих задач в школе не решали, не было их и в задачниках. Но теперь в задачниках их доста-

точно, многие учителя решают с учащимися задачи на доказательство.

8. В задачниках П. А. Ларичева желательнее в «ответах» помещать указания, а иногда и краткие решения задач на доказательство.

9. Есть много таких задач в различных методических пособиях. Но предлагаемые в них решения часто бывают нерациональными, недоступными для учащихся, а иногда и ошибочными.

10. Нельзя пренебрегать алгебраическими задачами на доказательство, но нельзя также преувеличивать их значение. Такие задачи нужно решать там и тогда, где и когда они действительно необходимы.

Материалы диссертации опубликованы в следующих статьях:

1. Г. П. Бевз, Доведення методом від супротивного, «Радянська школа», 1956, № 10.

2. Г. П. Бевз, Замечания к статье П. В. Стратилатова «Упражнения по алгебре на материале теоретической арифметики», «Математика в школе», 1957, № 6.

3. Г. П. Бевз, О книге С. Е. Ляпина, С. А. Гастевой, З. Я. Квасниковой, Б. И. Крельштейна «Методика преподавания математики», ч. 2. «Математика в школе», 1958, № 4.

4. Г. П. Бевз, О некоторых задачах с лишними числовыми данными, «Математика в школе», 1959, № 6.

5. Г. П. Бевз, Об одном неравенстве, «Математика в школе», 1960, № 1.

6. Г. П. Бевз, О формулах сокращенного умножения, «Математика в школе», 1960, № 2.

7. Bevz Grigorij, Důkazové úlohy v algebře, «Matematika ve škole», Praha, 1959, Nr. 3.