

### Вивчення властивостей графіків деяких тригонометричних функцій на уроках алгебри та початків аналізу в класах з поглибленим вивченням математики

**Анотація.** Статтю присвячено вивченню властивостей графіків деяких тригонометричних функцій та елементарних перетворень цих графіків. На основі аналізу результатів зовнішнього незалежного оцінювання за 2013-2016 н.р. показано низький рівень підготовки учнів з тригонометрії. У публікації здійснено добір вправ для формування вмінь будувати графіки тригонометричних функцій, виконувати елементарні перетворення цих графіків, ілюструвати властивості тригонометричних функцій за допомогою графіків, та аналізувати зміну графіків та їх властивостей залежно від значень відповідних параметрів. Зроблені у статті висновки можуть бути використані під час практичної розробки методики навчання тригонометричних функцій у класах з поглибленим вивченням математики.

**Ключові слова:** алгебра та початки аналізу, графіки тригонометричних функцій, властивості тригонометричних функцій, GRAN1.

За програмою для класів з поглибленим вивченням математики для старшої школи однією з провідних змістових ліній курсу «Алгебра і початки аналізу» є функціональна. Тому у процесі навчання слід приділяти особливу увагу функціональним залежностям, що вивчаються.

Дослідження властивостей функцій є не менш важливою темою, під час вивчення потрібно звертати увагу учнів на зв'язок таких понять, як функція, рівняння, нерівність. Зокрема, необхідно формувати розуміння того, що розв'язування рівняння  $f(x)=0$  та нерівності  $f(x)>0$  є окремими випадками задачі дослідження функції  $y=f(x)$  (знаходження нулів функції та проміжків її знакосталості).

Зокрема за програмою передбачено вивчення тригонометричних функцій у 10 класі у обсязі 42 годин, що дозволяє не лише вивчити основні тригонометричні функції та їх властивості, а й розглянути моделювання реальних процесів, інтерпретації перебігу фізичного процесу як функції від змінної фізичної величини. Учні зокрема під час уроку на тему «Гармонічні коливання» мають змогу асоціювати перебіг в часі реального процесу із зміною значень відповідної функції, разом із зміною значень її аргументів, аналізуючи її графік, вивчати властивості. До того ж деякі притаманні явищу властивості пов'язуються із властивостями функцій (спадання, зростання тощо).

Аналізуючи офіційні звіти за 2013-2016 р.р. про проведення зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання, здобутих на основі повної загальної середньої освіти [2], можна стверджувати, що значна кількість абітурієнтів, відповідаючи на питання з тригонометрії, вибирають той чи інший варіант відповіді не в результаті аналізу умов завдання і отримання відповідних обґрунтованих висновків, а просто намагаються вгадати правильну відповідь.

Зокрема, у 2013 році на питання №19 «Вкажіть нерівність, що виконується для  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ » відповіді учасників на кожен варіант відповіді у відсотках склали приблизно 20%, що свідчить про очевидне вгадування (Рис. 1).

19. Укажіть нерівність, що виконується для  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ .

А	Б	В	Г	Д
$1 - \sin^2 \alpha < 0$	$\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha < 0$	$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha < 0$	$1 - \cos^2 \alpha < 0$	$\sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha < 0$

Відповіді учасників (%)					Не відповіді (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
А	Б	В	Г	Д*	0,5	0,20	0,38	0,463**
21,4	18,4	22,8	16,8	20,0				

Рис. 1

10. Спростіть вираз  $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\cos^2 \alpha$	$\sin^2 \alpha$	$\operatorname{tg}^2 \alpha$	$\operatorname{ctg}^2 \alpha$	1

Відповіді учасників (%)					Не відповіді на завдання (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
А*	Б	В	Г	Д				
25,50	16,50	27,13	20,14	10,30	0,43	25,50	51,53	0,49

Рис. 2

У 2015 році, виконуючи завдання №10 «Спростити вираз  $\frac{1}{1+tg^2x}$ », більше 27% учасників тестування вказали неправильну відповідь, очевидно не в результаті спрощення даного виразу, а просто намагались вгадати відповідь (Рис. 2).

За результатами зовнішнього незалежного оцінювання з математики у 2016 році лише 10% учасників тестування отримали 175 балів і вище, що є високим рівнем знань, але в тестовій частині завдань були запропоновані лише два завдання з тригонометрії.

Серед них – завдання на перевірку знань основних співвідношень між тригонометричними функціями одного аргументу (Рис. 3) та розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь.

17. Обчисліть значення виразу  $4\sin^2\alpha$ , якщо  $4\cos^2\alpha = 1$ .

А	Б	В	Г	Д
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	3	4

Ключ	Відповіді учасників (%)					Не виконали завдання (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
	А	Б	В	Г	Д				
Г	24,06	27,72	12,38	26,50	8,98	0,37	26,50	56,22	0,53

Рис. 3

20. Розв'яжіть рівняння  $3 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{3}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$	$\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$	$\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$	$\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$	$\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

Ключ	Відповіді учасників (%)					Не виконали завдання (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
	А	Б	В	Г	Д				
Д	10,78	20,56	18,70	18,35	30,95	0,65	30,95	61,91	0,54

Рис. 4

В офіційному звіті про проведення в 2016 році зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання, здобутих на основі повної загальної середньої освіти робляться висновки: «аналіз результатів виконання завдань сертифікаційної роботи показав, що значна кількість учасників зовнішнього незалежного оцінювання з математики має лише фрагментарні знання основних співвідношень тригонометрії... Тестовані часто не можуть правильно проаналізувати й зрозуміти дані, подані у вигляді графіка або рисунка, зіставити їх з умовою завдання. Здебільшого це стосується завдань на розпізнавання графіків функцій... Найбільші труднощі виникли в тестованих під час розв'язування завдань з розгорнутою відповіддю. Про це свідчить той факт, що майже половина учасників не приступили до розв'язування, а повністю розв'язати завдання 31, 32 та 33 змогли лише 1,7%, 1,08% та 0,11% учасників відповідно.»

Це свідчить про наявність значних проблем щодо вивчення та засвоєння тригонометрії в старшій школі.


Необхідною умовою підвищення мотивації навчання та засвоєння матеріалу є запровадження в навчальний процес інформаційно-комунікаційних технологій та їх ефективне використання. Одним із перспективних напрямів інформатизації шкільної математичної освіти є використання в навчальному процесі систем комп'ютерної математики.

Зокрема програмний засіб GRAN1 є продуктом вітчизняного виробництва і рекомендований Міністерством освіти і науки України як основна комп'ютерна підтримка вивчення шкільного курсу алгебри, початків аналізу та математичної статистики. С.В. Шамрай стверджує [1], що арсенал засобів навчання сучасного вчителя математики має містити програми, що застосовуються для створення або дослідження математичних об'єктів чи їх складових через числові і геометричні характеристики самих об'єктів. Завдяки зручному інтерфейсу та легкості у використанні такою програмою є GRAN1.

Зокрема GRAN1 зручно використовувати для створення графічних зображень та розв'язування навчально-дослідницьких задач, в тому числі, під час вивчення теми «Тригонометричні функції» у 10 класі з поглибленим вивченням математики.

Під час вивчення цієї теми учні стикаються з об'єктивними ускладненнями, одним з яких є витрати часу на побудову графіків та їх перетворень. За допомогою програми GRAN1 можна будувати графіки тригонометричних функцій на комп'ютері, що дозволить більше звернути увагу учнів на дослідження їх властивостей [3].

Перед початком вивчення перетворень графіків тригонометричних функцій доцільно провести етап актуалізації опорних знань, на якому згадати з учнями схему побудови графіків за допомогою GRAN1:

1. Створюємо об'єкт **Графік** за допомогою пункту меню **Об'єкт** → **Створити...**
2. У відкритому вікні **Введення виразу залежності** вводимо вираз, вибираємо проміжок, колір, тип і товщину лінії графіка тощо.
3. Виводимо графік функції на координатну площину за допомогою послуги «**Графік** → **Побудувати**» .

Використовуючи програмні засоби, можна розпочати вивчення тригонометричних функцій з більш складних прикладів. Для спрощення і кращого розуміння доцільно розглянути спочатку окремий випадок, приклад 1.

1. Побудувати графік функції  $y = 3 \sin(|x - \frac{\pi}{2}|) + 2$ .

Проведемо такі перетворення:

- 1)  $y = \sin x \rightarrow y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$  – паралельне перенесення вздовж осі абсцис вправо на  $\frac{\pi}{2}$  одиниць;
- 2)  $y = \sin(x - \frac{\pi}{2}) \rightarrow y = 3 \sin(x - \frac{\pi}{2})$  – розтягування вздовж осі ординат у 3 рази;
- 3)  $y = 3 \sin(x - \frac{\pi}{2}) \rightarrow y = 3 \sin(x - \frac{\pi}{2}) + 2$  – паралельне перенесення вздовж осі ординат вгору на 2 одиниці;
- 4)  $y = 3 \sin(x - \frac{\pi}{2}) + 2 \rightarrow y = 3 \sin(|x - \frac{\pi}{2}|) + 2$  – симетричне відображення відносно осі ординат частини графіка, яка лежить у півплощині  $x \geq 0$ . Шуканий графік складається з двох симетричних частин (Рис. 6).

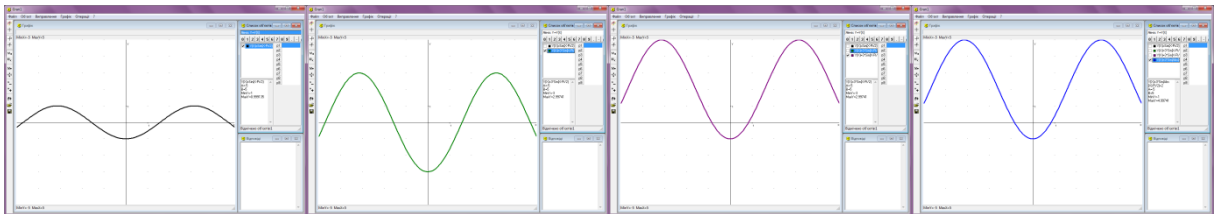


Рис. 5

Важливо послідовно демонструвати графіки функцій на кожному етапі побудови. На рис. 5 подані чотири послідовні кроки побудови графіка функції  $y = 3 \sin(|x - \frac{\pi}{2}|) + 2$ , а на рис. 6 наведені усі результати побудов в одному вікні для демонстрації перетворень.

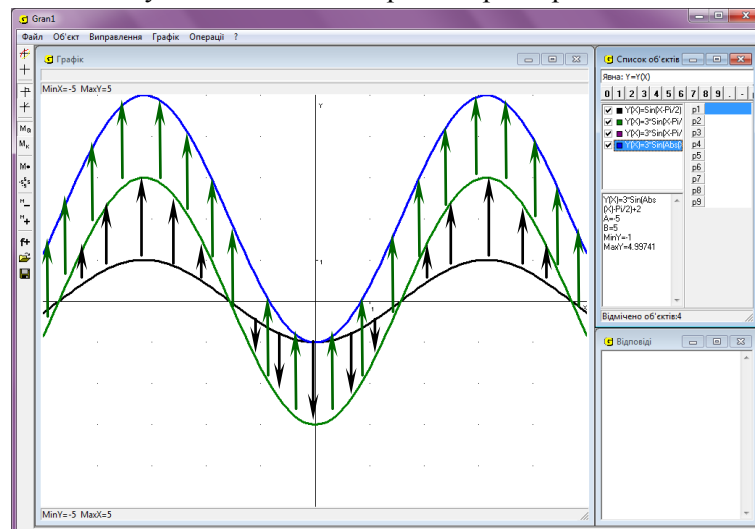


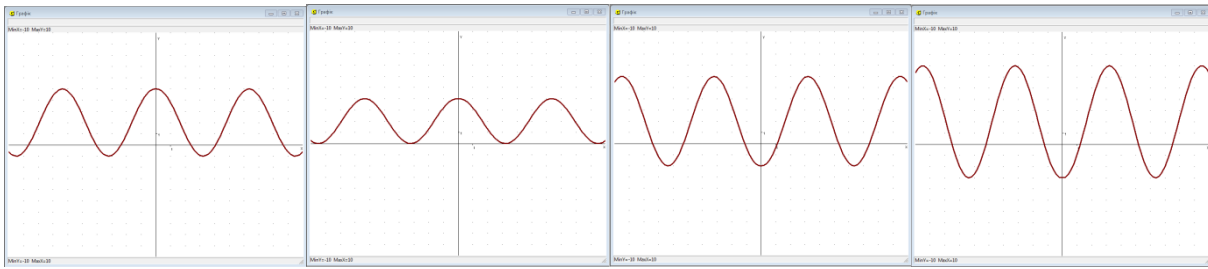
Рис. 6

На рис. 5 і 6 видно, що на четвертому кроці побудови не змінюється графік функції. Таке можливо у випадку, коли функція парна, тоді після застосування перетворення типу  $y = f(|x|)$  графік функції не змінюється.

Якщо замінити числові значення у формулі функції на параметри, отримаємо:  
 $y = p_1 \sin(|x| + p_2) + p_3$ .

Таким чином з'явиться можливість послідовно демонструвати графіки відповідно до значень параметрів функції.

На рисунках 7, 8, 9 подані окремі кадри змін графіків функції  $y = p_1 \sin(|x| + p_2) + p_3$  залежно від значень параметрів  $p_1$ ,  $p_2$  та  $p_3$  відповідно.



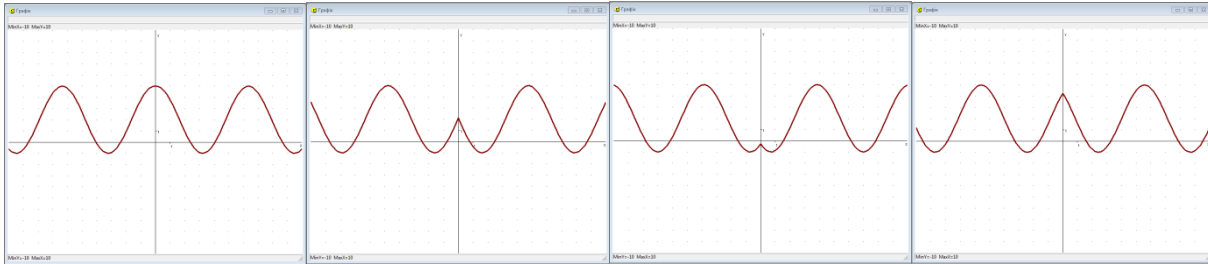
$$p1=3$$

$$p1=2$$

$$p1=-4$$

$$p1=-5$$

Рис. 7



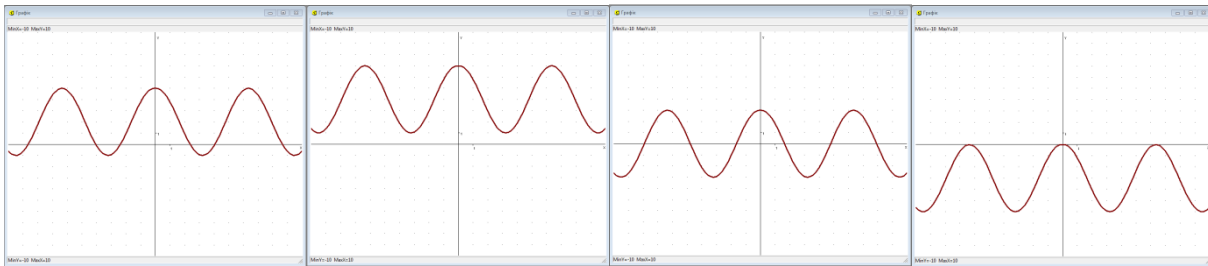
$$p2=\frac{\pi}{2}$$

$$p2=\pi$$

$$p2=4$$

$$p2=-4$$

Рис. 8



$$p3=2$$

$$p3=4$$

$$p3=0$$

$$p3=-3$$

Рис. 9

Як окремий варіант прикладу доцільно розглянути випадок, коли функція на третьому етапі побудови не є парною. Тоді, після застосування перетворення типу  $y = f(|x|)$  графік функції зміниться, а саме стане симетричним відносно осі ординат (Рис. 10).

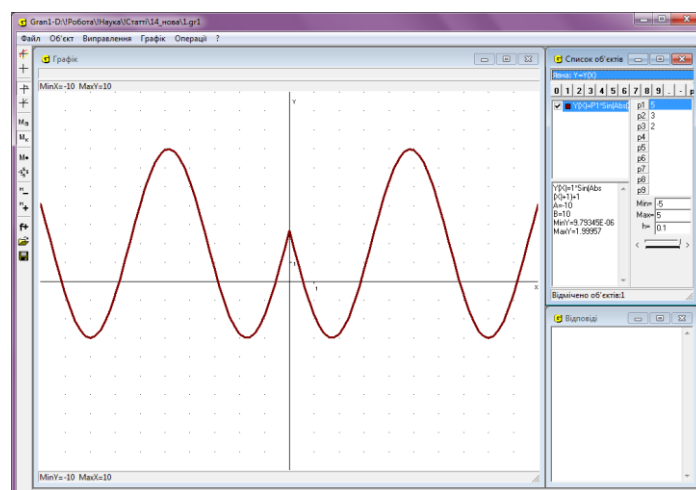


Рис. 10

Аналогічні вправи можна розглядати для більш складних функцій. Розглянемо деякі з них.  
Приклад 2.

2. Побудувати графік функції  $y = |2 \cdot \cos(3|x+5|+1)| + 4|$  (Рис. 11).

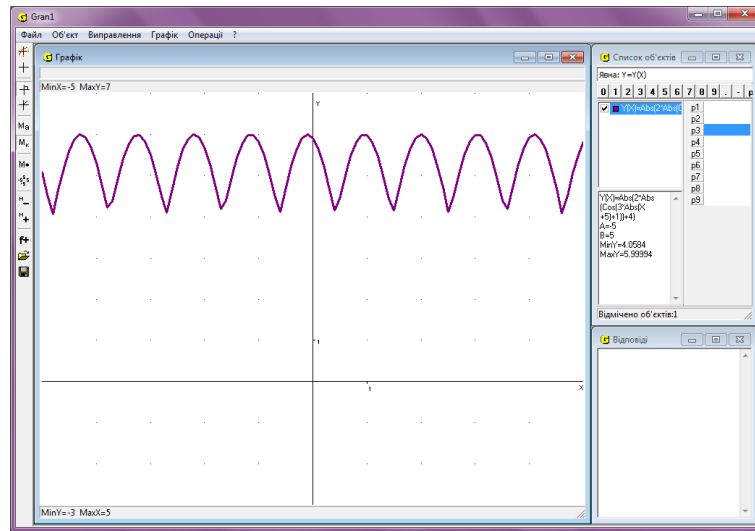


Рис. 11

Проведемо такі перетворення:

- 1)  $y = \cos x \rightarrow y = \cos(x + 1)$  – паралельне перенесення вздовж осі абсцис вліво на 1 одиницю;
- 2)  $y = \cos(x + 1) \rightarrow y = \cos(3x + 1)$  – стискування вздовж осі абсцис у 3 рази (збільшення частоти коливань);
- 3)  $y = \cos(3x + 1) \rightarrow y = \cos(3|x + 1|)$  – симетричне відображення відносно осі ординат частини графіка, що лежить у півплощині  $x \geq 0$ ;
- 4)  $y = \cos(3|x + 1|) \rightarrow y = \cos(3|x + 5| + 1)$  – паралельне перенесення вздовж осі абсцис вліво на 5 одиниць;
- 5)  $y = \cos(3|x + 5| + 1) \rightarrow y = |\cos(3|x + 5| + 1)|$  – частина графіка у півплощині  $y \geq 0$  без змін, а частина графіка, що лежить у півплощині  $y < 0$  симетрично відображається відносно осі ординат;
- 6)  $y = |\cos(3|x + 5| + 1)| \rightarrow y = 2 \cdot |\cos(3|x + 5| + 1)|$  – розтягування вздовж осі ординат у 2 рази;
- 7)  $y = 2 \cdot |\cos(3|x + 5| + 1)| \rightarrow y = 2 \cdot |\cos(3|x + 5| + 1)| + 4$  – паралельне перенесення вздовж осі ординат вгору на 4 одиниці;
- 8)  $y = 2 \cdot |\cos(3|x + 5| + 1)| + 4 \rightarrow y = 2 \cdot |\cos(3|x + 5| + 1)| + 4$  – частина графіка у півплощині  $y \geq 0$  без змін, а частина графіка, що лежить у півплощині  $y < 0$  симетрично відображається відносно осі ординат.

Якщо замінити числові значення у формулі функції на параметри, отримаємо:  
 $y = |p1 \cdot \cos(p2|x + p3| + p4)| + p5|$ .

Таким чином, з'явиться можливість послідовно демонструвати графіки відповідно до значень параметрів функції.

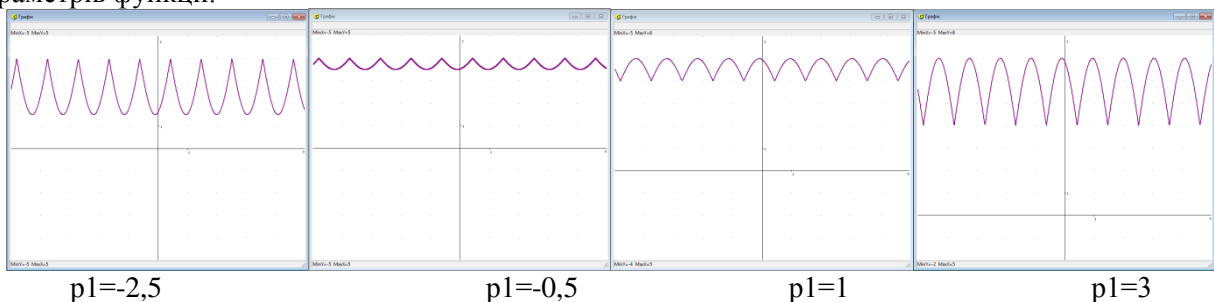


Рис. 12

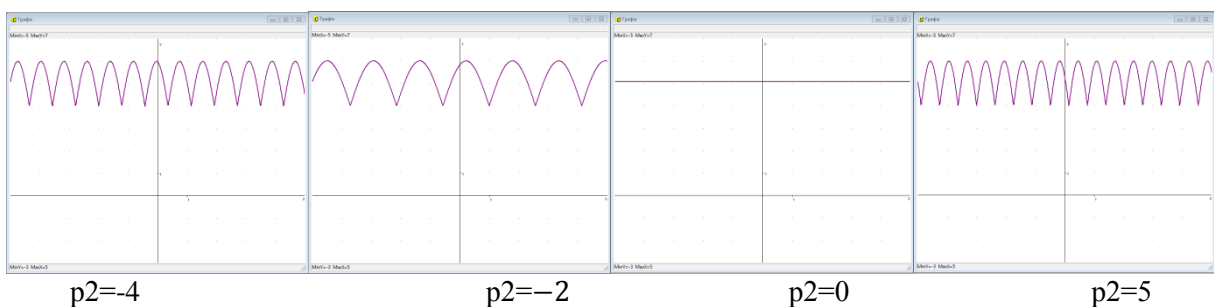


Рис. 13

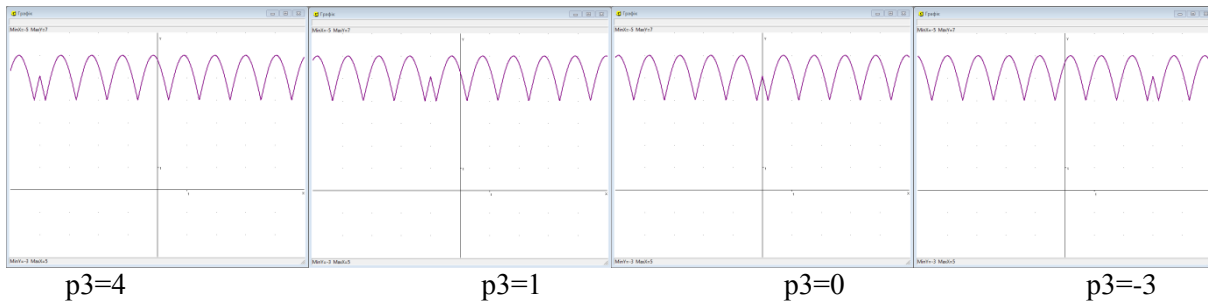


Рис. 14

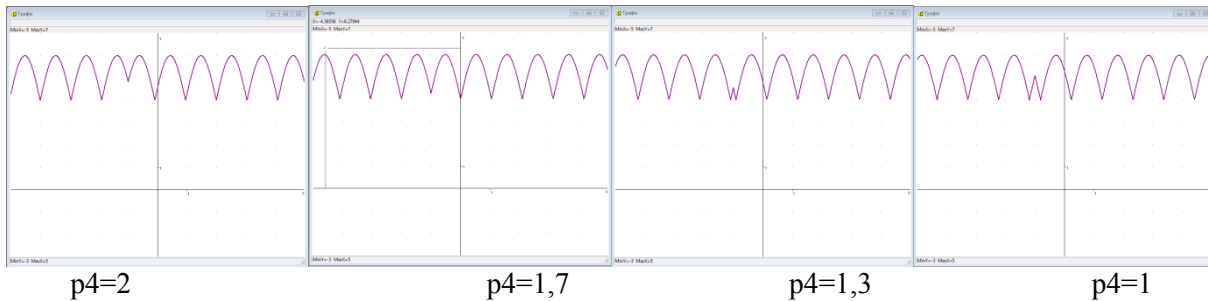


Рис. 15

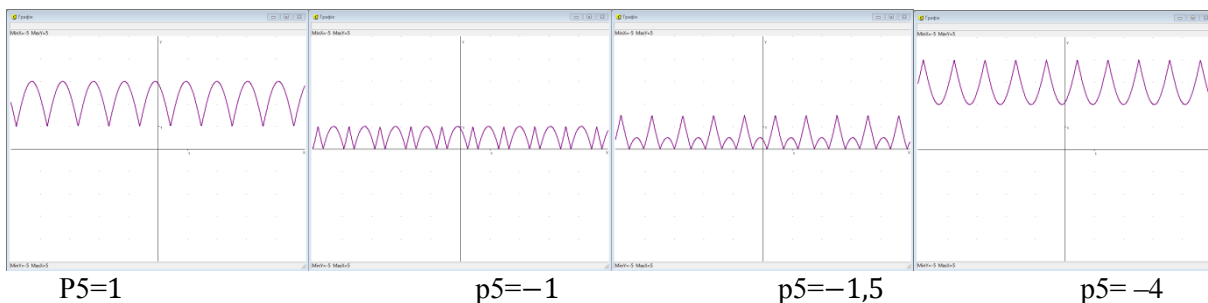


Рис. 16

На рисунках 12, 13, 14, 15, 16 подані окремі кадри змін графіків функції  $y = |p1 \cdot |\cos(p2 \cdot |x + p3| + p4)| + p5|$  залежно від значень параметрів  $p1, p2, p3, p4$  та  $p5$  відповідно, за якими можна проводити аналіз залежності вигляду функції та її властивостей від значень параметрів.

Запропоновані завдання розраховані на самостійну підготовку учнів до підсумкового контролю знань:

- 1)  $y = \sin |x + p1| + p2$ ;
- 2)  $y = p1 \sin(|x + p2|) + p3$ ;
- 3)  $y = \cos |p1x + p2|$ ;
- 4)  $y = |\cos(p1|x + \frac{\pi}{6})|$ .

Отже, використання сучасних інформаційно-комунікаційних технологій навчального призначення в процесі навчання математики дозволяє динамічно варіювати вихідні математичні об'єкти, зокрема тригонометричні функції, для візуалізації їх властивостей, за допомогою відповідних педагогічних програмних засобів можна змінювати певну кількість параметрів досліджуваного об'єкта, причому учень може безпосередньо бачити результат впливу зміни значень тих чи інших параметрів на стан об'єкта чи перебіг процесу. Застосування програми GRAN1 в процесі навчання математики підвищує рівень активності і мотивацію пізнавальної діяльності учнів, розвиває здібності альтернативного мислення, формує вміння розробляти стратегію пошуку розв'язків як навчальних, так і практичних задач, дозволяє прогнозувати результати реалізації прийнятих рішень на основі моделювання проявів досліджуваних явищ і перебігу процесів, з'ясування відповідних причинно-наслідкових зв'язків та їх сутності.

#### Список використаних джерел

1. Шамрай С.В. Уточнення переліку комп'ютерних математичних інструментів, необхідних вчителю математики // Фізико-математична освіта. Науковий журнал. – Суми: СумДПУ ім. А.С.Макаренка, 2014. – №1(2). – С. 33-34.
2. ОФІЦІЙНІ ЗВІТИ ПРО ПРОВЕДЕННЯ ЗНО [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <http://testportal.gov.ua/ofzvit/>.
3. Жалдак М.І. Математика з комп'ютером / М.І. Жалдак, Ю.В. Горошко, Є.Ф. Вінниченко. – [3 вид., доповнене]. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2015. – 340 с.

## Изучение свойств графиков некоторых тригонометрических функций на уроках алгебры и начал анализа в классах с углубленным изучением математики

*Билай И.М.*

**Анотация.** Статья посвящена изучению свойств графиков некоторых тригонометрических функций и элементарным преобразованиям этих графиков. На основании анализа результатов внешнего независимого оценивания 2013-2016 у.г. показано низкий уровень подготовки учащихся по тригонометрии. В публикации осуществлен подбор упражнений для формирования умений строить графики тригонометрических функций, выполнять элементарные преобразования этих графиков, иллюстрировать свойства тригонометрических функций с помощью графиков, и анализировать изменение графиков и их свойств в зависимости от значений соответствующих параметров. Сделанные в статье выводы могут быть использованы при практической разработке методики изучения тригонометрических функций в классах с углубленным изучением математики.

**Ключевые слова:** алгебра и начала анализа, графики тригонометрических функций, свойства тригонометрических функций, GRAN1.

## Studying of properties of some graph of trigonometric functions at lessons of algebra and beginnings of mathematical analysis in classes with mathematics profile.

*Bilyay I.M.*

**Resume.** The article is devoted to studying of properties of some graph of trigonometric functions and elementary transformations of graphs. Based on the analysis results of external evaluation for 2013-2016 school year it is shown the low level of preparation of students in trigonometry. The selection of the exercises is done in the publication to teach the students to graph the trigonometric functions, to make elementary transformations of graphs, to illustrate properties of some graph of trigonometric functions and to analyze the change properties depending on the values of the relevant parameters. Conclusions made in the article could be used during the development of practical methods of studying trigonometric functions in classes with mathematics profile.

**Keywords:** algebra and the beginnings of mathematical analysis, graphs of trigonometric functions, trigonometric functions properties, GRAN1.

УДК: 37.016:004.7

**Франчук Н. П.**

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

## Створення комп'ютерно-орієнтованого методичного забезпечення навчально-виховного процесу

**Анотация.** В статті розглядаються проблеми створення комп'ютерно-орієнтованого освітнього середовища. Розкриваються можливості використання хмарних технологій в навчальному процесі на прикладі навчального курсу «Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання інформатики та іноземної мови». Показано можливість врівноваженої роботи викладача та студентів під час органічного поєднаного і педагогічно виваженого використання традиційних і новітніх засобів навчання.

**Ключові слова:** освітнє середовище, комп'ютерно-орієнтовані системи навчання, хмарні технології.

Стрімкий розвиток суспільства в різних галузях ставить нові завдання перед системою вищої освіти. Виявляється недостатнім дати студенту певну базу знань, що можна охарактеризувати в освітніх стандартах, навчальних посібниках тощо. Необхідно розвивати у студента самостійне, гнучке, варіативне та критичне мислення.

Освіта в Україні сьогодні має ґрунтуватися не тільки на традиційних засадах (знаннях, уміннях, навичках), а й на нових, інноваційних засадах, запропонованих ЮНЕСКО – «вчитися знати, вчитися робити, вчитися бути, вчитися співіснувати» [1].

В Україні на сьогодні склалася суперечлива ситуація між вимогами суспільства до системи компетентностей фахівців, з одного боку, і реальним рівнем їх підготовки у вищих навчальних закладах – з іншого.

*Таблиця 1*

### Освітнє середовище

<i>Раніше</i>	<i>Сьогодні</i>
Щоб видати посібник, потрібен був друкарський станок, для проведення лекції – аудиторія.	Загально доступні технології, інструменти та засоби, за допомогою яких можна легко створити навчальні матеріали і ефективно розповсюдити їх.
Заняття проводились тільки в певний час в приміщенні.	Використання он-лайн-ресурсів і засобів дозволяє навчатися в будь-який час та в будь-якому місці, за наявності мережі Інтернет.