

## Фрактальні властивості спектрів випадкових величин з незалежними однаково розподіленими GLS-символами

М. Л. Лупаїн

(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова)

АНОТАЦІЯ. У роботі закладено основи метричної та розмірнісної теорії GLS-розкладів дійсних чисел. Описано феномени, які відрізняють дані розклади від  $Q_\infty$ -розкладів та розкладів Люрота і які дозволяють будувати сингулярні ймовірнісні розподіли всіх спектральних типів. У даній роботі також запропоновано новий підхід до дослідження фрактальних властивостей спектрів випадкових величини з незалежними однаково розподіленими GLS-символами. Метод полягає в тому, що розглядається відображення

$$\varphi(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_\infty}) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{GLS}$$

і досліджуються умови, при яких  $\varphi$  зберігає розмірність Хаусдорфа-Безиковича на одиничному відрізьку. Для дослідження DP-властивостей перетворення  $\varphi$ , розглядається питання довірчості сімейств циліндрів для  $Q_\infty$  і GLS-розкладів дійсних чисел.

**Ключові слова:** GLS-зображення,  $Q_\infty$ -зображення, фрактали, DP-перетворення, довірчі системи покриттів, сингулярно неперервні ймовірнісні міри.

ABSTRACT. In this paper we develop metric, dimensional and probabilistic theories of generalized Lüroth expansions. In the introduction we remind main notions related to such expansions and study topological properties of the set  $\Delta_\infty^{GLS}$  of those real numbers which do not belong to any cylinder of the first rank. We show, in particular, that this set can be of continuum cardinality.

One of the main problems studied in the paper is the determination of fractal properties of spectra of random variables with independent identically distributed GLS-symbols, i.e., random variables  $\xi$  of the form

$$\xi = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_k \dots}^{GLS},$$

where  $\xi_k$  takes values 0, 1, 2, ... with probabilities  $p_0, p_1, p_2, \dots$  respectively. To this end we study fractal properties of the set

$$C[GLS, V] := \{x : x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{GLS}, \alpha_j \in V\}.$$

ABSTRACT. To find the Hausdorff-Besicovitch dimension of such a set we develop a new approach and show that transformation

$$\varphi(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^{Q_\infty}) = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^{GLS},$$

preserves the Hausdorff-Besicovitch dimension of the set  $C[GLS, V]$ .

As a result we get the following theorem.

**Theorem.** *If the set  $\Delta_\infty^{GLS}$  is at most countable, then for any GLS-expansion generated by stochastic vector  $Q_\infty$  the Hausdorff-Besicovitch dimension of the spectrum of the distribution of the random variable  $\xi$  with independent identically distributed GLS-symbols can be calculated in the following way.*

1) *If the equation  $\sum_{i \in V} q_i^x = 1$  has one root  $\alpha_0$  on  $[0, 1]$ , then*

$$\dim_H S_\xi = \alpha_0.$$

2) *If the equation  $\sum_{i \in V} q_i^x = 1$  has no roots on  $[0, 1]$ , then*

$$\dim_H S_\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k,$$

where  $\alpha_k$  are the roots of the equations  $\sum_{i \in V_k} q_i^x = 1$ ,  $V_k = V \cap \{1, 2, \dots, k\}$ .

We also show that the Hausdorff-Besicovitch dimension of the spectrum of the distribution of the random variable  $\xi$  with independent identically distributed GLS-symbols can be calculated in the following way:

$$\dim_H(S_\xi) = \sup\{x : \sum_{i: p_i > 0} q_i^x > 1\}.$$

**Key words:** GLS-representations,  $Q_\infty$ -representations, fractals, DP-transformations, faithful covering systems, singularly continuous probability measures.

Mathematics Subject Classification (2010): 11K55, 26A30, 28A80, 60G30.

## 1. GLS-РОЗКЛАДИ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

Нехай  $Q_\infty = (q_0, q_1, \dots, q_n, \dots)$  – нескінченний стохастичний вектор з додатними координатами. Опишемо покроково процедуру побудови GLS-зображення дійсних чисел.

### Крок 1.

Розглянемо зчисленну послідовність відрізків  $\Delta_i^{GLS} = [a_i, b_i]$ , таких, що

$$\text{int}\Delta_i^{GLS} \cap \text{int}\Delta_j^{GLS} = \emptyset, (i \neq j)$$

і

$$|\Delta_i^{GLS}| = q_i, i \in N \cup \{0\} =: N_0,$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} q_i = 1.$$

Відрізок  $\Delta_i^{GLS}$  називається циліндром 1-го рангу GLS-розкладу. Позначимо через  $\Delta_\infty^{GLS}$  множину тих точок з  $[0, 1]$ , які не попали до жодного з  $\Delta_i^{GLS}$ , тобто

$$\Delta_\infty^{GLS} = [0, 1] \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} \Delta_i^{GLS}.$$

Зауважимо, що множина  $\Delta_\infty^{GLS}$  є, очевидно, борелівською множиною нульової міри Лебега (оскільки сума довжин циліндрів першого рангу дорівнює 1), але структура множини  $\Delta_\infty^{GLS}$  може бути досить різноманітною.

**1) Множина  $\Delta_\infty^{GLS}$  може бути порожньою.** Це буде відбуватись, зокрема, тоді, коли

$$\Delta_0^{GLS} = [\frac{3}{4}, 1], \quad \sup \Delta_k^{GLS} = \inf \Delta_{k+1}^{GLS}, \quad \forall k \in N;$$

**2) Множина  $\Delta_\infty^{GLS}$  може бути непорожньою, але скінченною.** Це буде відбуватись, зокрема, тоді, коли  $\Delta_i^{GLS}$  розташовані зліва направо,  $\sup \Delta_k^{GLS} = \inf \Delta_{k+1}^{GLS}, \forall k \in N_0$ . У цьому випадку лише точка 1 не попадає до жодного з циліндрів першого рангу;

**3) Множина  $\Delta_\infty^{GLS}$  може бути зчисленною.** Для побудови такої системи циліндрів першого рангу розіб'ємо множину  $N_0$  невід'ємних цілих чисел на зчисленне об'єднання зчисленних множин за принципом, який отримується з класичного порядку О.М.Шарковського (див. [12]) :

$$\begin{aligned} N_0 = \{ & 0, \quad 1, \quad 2, \quad 4, \quad 8, \quad \dots, \quad 2^n, \quad \dots \\ & 3 \cdot 1, \quad 3 \cdot 2, \quad 3 \cdot 4, \quad 3 \cdot 8, \quad \dots, \quad 3 \cdot 2^n, \quad \dots \\ & 5 \cdot 1, \quad 5 \cdot 2, \quad 5 \cdot 4, \quad 5 \cdot 8, \quad \dots, \quad 5 \cdot 2^n, \quad \dots \\ & 7 \cdot 1, \quad 7 \cdot 2, \quad 7 \cdot 4, \quad 7 \cdot 8, \quad \dots, \quad 7 \cdot 2^n, \quad \dots \\ & 9 \cdot 1, \quad 9 \cdot 2, \quad 9 \cdot 4, \quad 9 \cdot 8, \quad \dots, \quad 9 \cdot 2^n, \quad \dots \\ & \dots \end{aligned}$$

$$(2n + 1) \cdot 1, (2n + 1) \cdot 2, (2n + 1) \cdot 4, (2n + 1) \cdot 8, \dots, (2n + 1) \cdot 2^n, \dots\}.$$

Розташуємо циліндри першого рангу, номери яких записані у першому рядку, зліва направо так, щоб вони не мали спільних межових точок і щоб точка 1 була граничною для цієї послідовності циліндрів.

Відрізок  $[0, \inf \Delta_0]$  розіб'ємо на зчисленну кількість відрізків, довжини яких знаходяться у пропорції  $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \dots : \frac{1}{2^s} : \dots$  і, які є циліндрами першого рангу, номери яких записані у другому рядку:

$$\begin{aligned} [\frac{1}{2} \inf \Delta_0, \inf \Delta_0] &= \Delta_3, \\ [0, \frac{1}{4} \inf \Delta_0] &= \Delta_6, \\ [\frac{3}{8} \inf \Delta_0, \frac{1}{2} \inf \Delta_0] &= \Delta_{12}, \\ [\frac{1}{4} \inf \Delta_0, \frac{1}{16} \inf \Delta_0] &= \Delta_{24}, \\ [\frac{15}{32} \inf \Delta_0, \frac{3}{8} \inf \Delta_0] &= \Delta_{48}, \\ [\frac{1}{16} \inf \Delta_0, \frac{1}{64} \inf \Delta_0] &= \Delta_{96} \end{aligned}$$

...

Тоді точка

$$\frac{1}{4} \inf \Delta_0 + \frac{1}{16} \inf \Delta_0 + \frac{1}{64} \inf \Delta_0 + \dots = \frac{\frac{1}{4} \inf \Delta_0}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \inf \Delta_0$$

не належить жодному із циліндрів, номери яких записані у другому рядку;

Відрізок  $[\sup \Delta_0, \inf \Delta_1]$  розіб'ємо на зчисленну кількість відрізків, довжини яких знаходяться у пропорції  $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \dots : \frac{1}{2^s} : \dots$  і, які є циліндрами першого рангу, з номерами записаними у третьому рядку:

Нехай  $|\inf \Delta_1 - \sup \Delta_0| = p_1$ .

$$\begin{aligned} [\sup \Delta_0 + \frac{1}{2}p_1, \inf \Delta_1] &= \Delta_5, \\ [\sup \Delta_0, \sup \Delta_0 + \frac{1}{4}p_1] &= \Delta_{10}, \\ [\sup \Delta_0 + \frac{3}{8}p_1, \sup \Delta_0 + \frac{1}{2}p_1] &= \Delta_{20}, \\ [\sup \Delta_0 + \frac{1}{4}p_1, \sup \Delta_0 + \frac{1}{16}p_1] &= \Delta_{40}, \\ [\sup \Delta_0 + \frac{15}{32}p_1, \sup \Delta_0 + \frac{3}{8}p_1] &= \Delta_{80}, \\ [\sup \Delta_0 + \frac{1}{16}p_1, \sup \Delta_0 + \frac{1}{64}p_1] &= \Delta_{160} \end{aligned}$$

...

Тоді точка

$$\sup \Delta_0 + (\frac{1}{4}p_1 + \frac{1}{16}p_1 + \frac{1}{64}p_1 + \dots) = \sup \Delta_0 + \frac{\frac{1}{4}p_1}{1 - \frac{1}{4}} = \sup \Delta_0 + \frac{1}{3}p_1$$

не належить жодному із циліндрів, номери яких записані у третьому рядку;

Відрізок  $[\sup \Delta_1, \inf \Delta_2]$  розіб'ємо на зчисленну кількість відрізків, довжини яких знаходяться у пропорції  $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \dots : \frac{1}{2^s} : \dots$  і, які є циліндрами першого рангу, з номерами записаними у четвертому рядку:

Нехай  $|\inf \Delta_2 - \sup \Delta_1| = p_2$ .

$$\begin{aligned} [\sup \Delta_1 + \frac{1}{2}p_2, \inf \Delta_2] &= \Delta_7, \\ [\sup \Delta_1, \sup \Delta_1 + \frac{1}{4}p_2] &= \Delta_{14}, \\ [\sup \Delta_1 + \frac{3}{8}p_2, \sup \Delta_1 + \frac{1}{2}p_2] &= \Delta_{28}, \\ [\sup \Delta_1 + \frac{1}{4}p_2, \sup \Delta_1 + \frac{1}{16}p_2] &= \Delta_{56}, \\ [\sup \Delta_1 + \frac{15}{32}p_2, \sup \Delta_1 + \frac{3}{8}p_2] &= \Delta_{112}, \\ [\sup \Delta_1 + \frac{1}{16}p_2, \sup \Delta_1 + \frac{1}{64}p_2] &= \Delta_{224} \end{aligned}$$

...

Тоді точка

$$\sup \Delta_1 + \left(\frac{1}{4}p_2 + \frac{1}{16}p_2 + \frac{1}{64}p_2 + \dots\right) = \sup \Delta_1 + \frac{\frac{1}{4}p_2}{1 - \frac{1}{4}} = \sup \Delta_1 + \frac{1}{3}p_2$$

не належить жодному із циліндрів, номери яких записані у четвертому рядку;

Аналогічно, відрізок  $[\sup \Delta_{2^{n-1}}, \inf \Delta_{2^n}]$  розіб'ємо на зчисленну кількість відрізків, довжини яких знаходяться у пропорції  $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \dots : \frac{1}{2^s} : \dots$ , і які є циліндрами першого рангу, номери яких записані у  $(n + 2)$ -му рядку.

$|\inf \Delta_{2^n} - \sup \Delta_{2^{n-1}}| = p_{2^n}$  І тоді точка

$$\sup \Delta_{2^{n-1}} + \frac{1}{3}p_{2^n}$$

не належить жодному із циліндрів номери яких записані у  $(n + 2)$ -му рядку.

З конструкції побудови системи циліндрів першого рангу випливає, що

$$\Delta_{\infty}^{GLS} = \left\{ \frac{1}{3} \inf \Delta_0, \sup \Delta_0 + \frac{1}{3}p_1, \sup \Delta_1 + \frac{1}{3}p_2, \dots, \sup \Delta_{2^{n-1}} + \frac{1}{3}p_{2^n}, \dots \right\}.$$

**3) Множина  $\Delta_{\infty}^{GLS}$  може мати потужність континуум.** Для побудови такої системи циліндрів першого рангу занумеруємо (за спаданням довжини, а при рівності довжин - зліва направо) інтервали, які вилучаються при побудові класичної множини Кантора і виберемо циліндри першого рангу так, щоб вони співпадали із замиканнями вказаних інтервалів, тобто

$$\Delta_0 = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \Delta_1 = \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right], \Delta_2 = \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right], \Delta_3 = \left[\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right], \Delta_4 = \left[\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right], \dots$$

У цьому випадку всі точки другого роду (тобто точки, які не є трійково-раціональними) класичної множини Кантора належать до  $\Delta_{\infty}^{GLS}$ , звідки і випливає континуальність  $\Delta_{\infty}^{GLS}$ .

**Крок 2.**

Для кожного з циліндрів 1-го рангу  $\Delta_{i_1}^{GLS}$  розглянемо послідовність відрізків  $\Delta_{i_1 i_2}^{GLS} \subset \Delta_{i_1}^{GLS}$  таких, що

$$\frac{|\Delta_{i_1 i_2}^{GLS}|}{|\Delta_{i_1}^{GLS}|} = q_{i_2}$$

і таких, що взаємне розташування циліндрів  $\Delta_{i_1 i_2}^{GLS}$  в  $\Delta_{i_1}^{GLS}$  таке ж як і для циліндрів  $\Delta_{i_1}^{GLS}$  на множині  $[0, 1]$ .

Відрізки  $\Delta_{i_1 i_2}^{GLS}$  називаються циліндрами 2-го рангу GLS-розкладу.

**Крок n.** Аналогічно, для кожного з циліндрів  $(n-1)$ -го рангу  $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}^{GLS}$  розглянемо послідовність відрізків  $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} i_n}^{GLS} \subset \Delta_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}^{GLS}$  таких, що

$$\frac{|\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} i_n}^{GLS}|}{|\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}^{GLS}|} = q_{i_n}, i_n \in N_0$$

і взаємне розташування  $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_n}^{GLS}$  в  $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}^{GLS}$  таке як для циліндрів 1-го рангу на  $[0, 1]$ .

Відрізки  $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_n}^{GLS}$  називаються циліндрами  $n$ -го рангу GLS-розкладу.

Нехай

$$q_{max} := \max_i q_i.$$

За побудовою  $|\Delta_{i_1 i_2 \dots i_n}^{GLS}| = q_{i_1} \cdot q_{i_2} \cdot \dots \cdot q_{i_n} \leq (q_{max})^n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ .

Розглянемо послідовність множин

$$\begin{aligned} M_1 &:= \bigcup_{i=0}^{\infty} \Delta_i^{GLS}, \\ M_2 &:= \bigcup_{i_1=0}^{\infty} \bigcup_{i_2=0}^{\infty} \Delta_{i_1 i_2}^{GLS}, \\ &\dots \\ M_n &:= \bigcup_{i_1=0}^{\infty} \bigcup_{i_2=0}^{\infty} \dots \bigcup_{i_n=0}^{\infty} \Delta_{i_1 i_2 \dots i_n}^{GLS}, \dots \end{aligned}$$

Нехай

$$M := \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n.$$

Для довільної послідовності індексів  $\{i_k\}$ ,  $i_k \in N_0$  існує послідовність таких вкладених відрізків

$$\Delta_{i_1}^{GLS} \supset \Delta_{i_1 i_2}^{GLS} \supset \Delta_{i_1 i_2 i_3}^{GLS} \supset \dots \supset \Delta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{GLS} \supset \dots,$$

що  $|\Delta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{GLS}| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ . Тому існує єдина точка  $x \in [0, 1]$ , яка належить всім цим циліндрам.

І навпаки, якщо  $x \in M$ , то існує послідовність циліндрів

$$\Delta_{i_1(x)}^{GLS} \subset \Delta_{i_1(x) i_2(x)}^{GLS} \subset \Delta_{i_1(x) i_2(x) i_3(x)}^{GLS} \subset \dots \subset \Delta_{i_1(x) i_2(x) \dots i_k(x)}^{GLS} \subset \dots,$$

які містять  $x$ , тобто

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{i_1(x) i_2(x) \dots i_k(x)}^{GLS} = \Delta_{i_1(x) i_2(x) \dots i_k(x) \dots}^{GLS} \quad (1)$$

Вираз (1) називається GLS-зображенням точки  $x$ .

**Зауваження 1.** В залежності від взаємного розташування циліндрів 1-го рангу зображення (1) може бути єдиним, а може існувати зчисленна множина точок, що мають два різні GLS-зображення.

Якщо

$$\Delta_{\infty}^{GLS} = \emptyset,$$

то для довільної точки  $x \in [0, 1]$  існує послідовність циліндрів

$$\Delta_{i_1(x)}^{GLS} \subset \Delta_{i_1(x) i_2(x)}^{GLS} \subset \Delta_{i_1(x) i_2(x) i_3(x)}^{GLS} \subset \dots \subset \Delta_{i_1(x) i_2(x) \dots i_k(x)}^{GLS} \subset \dots,$$

які містять  $x$ , і

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{i_1(x) i_2(x) \dots i_k(x)}^{GLS} = \Delta_{i_1(x) i_2(x) \dots i_k(x) \dots}^{GLS}.$$

Частковим випадком GLS-розкладу числа  $x \in [0, 1]$  є розклад Люрота (див.[3]). У цьому випадку  $q_i = \frac{1}{(i+1)(i+2)}$  і  $\sup \Delta_{i+1} = \inf \Delta_i$ . Якщо відношення довжин вкладених циліндрів двох послідовних рангів залежить від останнього індексу циліндра і є степенем числа  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  і серед циліндрів одного рангу, які належать циліндру попереднього рангу, немає самого лівого і самого правого циліндра, то отримаємо  $G_\infty^2$ -зображення числа  $x$ . (див.[11]).

Нехай  $\{\xi_k\}$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин:

$$P(\xi_k = i) := p_i \geq 0, \forall i \in N_0,$$

де

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1.$$

Використовуючи послідовність  $\{\xi_k\}$  та довільне фіксоване  $GLS$ —представлення, розглянемо випадкову величину

$$\xi = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_k \dots}^{GLS},$$

яку називають випадковою величиною з незалежними однаково розподіленими  $GLS$ -символами.

Позначимо через  $\mu_\xi$  відповідну ймовірнісну міру, яку називатимемо ймовірнісною мірою з незалежними однаково розподіленими  $GLS$ -символами.

У роботі [4] для дослідження тополого-метричних властивостей спектра випадкової величини з незалежними  $GLS$ -символами досліджувались властивості множин класу

$$C[GLS, V] = \{x : x = \Delta_{\alpha_1(x) \dots \alpha_k(x) \dots}, \alpha_k \in V\},$$

де  $V$  - зліченна множина. Метод, використаний у [4], [6], [7] допускає узагальнення на інші зображення дійсних чисел, якщо відповідні множини будуть самоподібними, або  $N$ -самоподібними.

У даній роботі розглядається інший підхід до дослідження фрактальних властивостей спектрів випадкових величини з незалежними  $GLS$ -символами. Метод полягає в тому, що розглядається відображення

$$\varphi(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_\infty}) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{GLS}$$

і досліджуються умови, при яких  $\varphi$  зберігає розмірність Хаусдорфа-Безиковича підмножин певного виду. Для дослідження DP-властивостей перетворення  $\varphi$  розглянемо питання довірчості сімейств покриттів для  $Q_\infty$  і  $GLS$ -розкладів дійсних чисел для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича спектрів випадкових величин з незалежними однаково розподіленими  $GLS$ -символами.

## 2. ДОВІРЧИТЬ СИСТЕМ ПОКРИТТІВ ОДИНИЧНОГО ВІДРІЗКА, ПРОДЖЕНИХ $Q_\infty$ І GLS-РОЗКЛАДАМИ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

Нагадаємо деякі основні означення.

**Означення 1.** Сімейство  $\Phi$  підмножин з  $[0, 1]$  називається локально тонким сімейством покриттів множини  $M$ , якщо для довільної множини  $E \subset M$  і для довільного  $\varepsilon > 0$  існує не більш як зчисленне  $\varepsilon$ -покриття  $\{E_j\}$  множини  $E$  ( $E_j \in \Phi, |E_j| \leq \varepsilon$ ).

**Означення 2.** Для довільного  $\alpha > 0$  та довільної локально тонкої системи покриттів  $\Phi$ ,  $\alpha$ -вимірною мірою Хаусдорфа підмножини  $E \subset M$  відносно сімейства  $\Phi$  називається

$$H^\alpha(E, \Phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \inf_{\{E_j\}} \left\{ \sum_j |E_j|^\alpha \right\} \right],$$

де інфімум взято за всіма не більш як зчисленими  $\varepsilon$ -покриттями  $\{E_j\}$  множини  $E, E_j \in \Phi$ .

**Означення 3.** Розмірністю Хаусдорфа-Безиковича множини  $E$  відносно сімейства покриттів  $\Phi$  називається таке невід'ємне число, що

$$\dim_H(E, \Phi) = \inf \{ \alpha : H^\alpha(E, \Phi) = 0 \}.$$

Якщо  $\Phi$  є сімейством всіх замкнених (відкритих) підмножин з  $[0, 1]$  або сімейством всіх  $s$ -адичних циліндрів, то  $\dim_H(E, \Phi)$  співпадає з класичною розмірністю Хаусдорфа-Безиковича  $\dim_H(E)$  множини  $E$ .

**Означення 4.** Локально тонке сімейство покриттів  $\Phi$  називається довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича (на множині  $M$ ), якщо для довільної множини  $E \subset M$  має місце рівність

$$\dim_H(E, \Phi) = \dim_H(E).$$

Нехай  $\Phi$  – система циліндрів, породжена  $Q_\infty$ -розкладом і  $\Phi' = \varphi(\Phi)$  – система циліндрів GLS-розкладу.

**Теорема 1.** Якщо система  $\Phi$  довірна на  $[0, 1)$ , а система  $\Phi'$  довірна на множині  $M$ , то відображення  $\varphi$  є DP-відображенням на  $[0, 1)$ .

**Доведення.** Нехай  $E$  – довільна підмножина з  $[0, 1)$  і  $E' = \varphi(E)$ . Розглянемо довільне  $\varepsilon$ -покриття  $\{E_j\}$  множини  $E$  циліндрами з системи  $\Phi$ . Тоді  $\{E'_j\}$  буде утворювати  $\varepsilon$ -покриття множини  $E'$  циліндрами з системи  $\Phi'$ .

Оскільки

$$|\varphi(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q_\infty})| = |\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{GLS}| = |\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q_\infty}| = q_{\alpha_1} \cdot q_{\alpha_2} \cdot \dots \cdot q_{\alpha_n},$$



то відображення  $\varphi$  відображає циліндр з  $\Phi$  в циліндр  $\Phi'$  і при цьому зберігає його довжину. Відповідні  $\alpha$ -об'єми будуть рівними:

$$\sum |E_j|^\alpha = \sum |E'_j|^\alpha, \forall \{E_j\}.$$

Тому

$$H_\varepsilon^\alpha(E, \Phi) = H_\varepsilon^\alpha(E', \Phi').$$

При переході до границі, коли  $\varepsilon \rightarrow 0$ , отримаємо

$$H^\alpha(E, \Phi) = H^\alpha(E', \Phi').$$

А отже,

$$\dim_H(E, \Phi) = \dim_H(E', \Phi').$$

За умовою теореми системи  $\Phi$  і  $\Phi'$  є довірчими. Отже,

$$\dim_H(E) = \dim_H(E').$$

Таким чином,  $\varphi$  зберігає розмірність Хаусдорфа-Безиковича. □

З метою дослідження спектрів розподілів випадкових величин з незалежними GLS-символами, розглянемо наступні сімейства множин.

Нехай

$$C := C[Q_\infty, V] = \{x : x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{Q_\infty}, \alpha_j \in V\}$$

і

$$C' := C'[GLS, V] = \varphi(C[Q_\infty, V]) = \{x : x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{GLS}, \alpha_j \in V\}$$

де  $V = \{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots\} \subset N_0, i_j < i_{j+1}, \forall j \in N$ . Множини  $C$  і  $C'$  самоподібні (якщо  $V$  – скінченна), або  $N$ -самоподібні (якщо  $V$  – нескінченна).

Розглянемо

$$C_k := C_k[Q_\infty, V_k] = \{x : x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}, \alpha_j \in V_k\},$$

$$C'_k := C'_k[GLS, V_k] = \varphi(C_k[Q_\infty, V_k]) = \{x : x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{GLS}, \alpha_j \in V_k\},$$

де  $V_k = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}, i_1 < i_2 < \dots < i_k$ .

**Теорема 2.** Для довільного нескінченного стохастичного вектора  $Q_\infty = (q_0, q_1, \dots, q_n \dots)$  з додатними координатами має місце рівність

$$\dim_H(C[Q_\infty, V]) = \dim_H(C'[GLS, V]).$$

*Доведення.* Для покриття множин  $C_k$  і  $C'_k$  циліндрами достатньо використовувати циліндри  $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$  та  $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{GLS}$  відповідно, для яких  $\alpha_j \in V_k$ .

Нехай  $\Phi_n = \{\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}, \alpha_j \in N_0\}$  – система циліндрів  $n$ -го рангу  $Q_\infty$ -розкладу. Тоді

$$\Phi = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Phi_j.$$

Позначимо  $A_1 = \{\Delta_{\alpha_1}, \alpha_1 \in V_k\}$ ,  $B_1 = \Phi_1 \setminus A_1 = \{\Delta_{\alpha_1}, \alpha_1 \notin V_k\}$ . Аналогічно,  $A_n = \{\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}, \alpha_j \in V_k, j = \overline{1, n}\}$ ,  $B_n = \Phi_n \setminus A_n$ .

Розглянемо наступний  $Q$ -розклад дійсних чисел, який породжений вектором  $Q_\infty$  та множиною  $V_k$

$$Q = Q(Q_\infty, V_k) = (q_0, q_1, \dots, q_{i_k}, \tilde{q}_{i_k+1}),$$

де

$$\tilde{q}_{i_k+1} = \sum_{i=i_k+1}^{+\infty} q_i.$$

Нехай  $\Phi(Q)$ — це система циліндрів даного  $Q$ -розкладу. Нехай  $\widetilde{C}_k := \widetilde{C}_k[Q, V_k]$ . Оскільки

$$C_k[Q_\infty, V_k] = \widetilde{C}_k[Q, V_k],$$

то

$$\dim_H(C_k[Q_\infty, V_k]) = \dim_H(\widetilde{C}_k[Q, V_k])$$

і

$$\dim_H(C_k[Q_\infty, V_k], \Phi) = \dim_H(\widetilde{C}_k[Q, V_k], \Phi(Q)).$$

Система  $\Phi(Q)$ — довірча [8]. Тому

$$\dim_H(\widetilde{C}_k[Q, V_k], \Phi(Q)) = \dim_H(\widetilde{C}_k[Q, V_k]) = \dim_H(C_k[Q_\infty, V_k]).$$

З іншого боку, внутрішності циліндрів з  $B_n$  не містять спільних точок з множиною  $C_k[Q_\infty, V_k]$ , тому для обчислення  $\dim_H(C_k[Q_\infty, V_k], \Phi)$  досить розглядати покриття множини  $C_k[Q_\infty, V_k]$  циліндрами з сімейства

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Тому

$$\dim_H(C_k[Q_\infty, V_k], \Phi) = \dim_H(C_k[Q_\infty, V_k], A).$$

Тоді

$$\dim_H(C_k[Q_\infty, V_k]) = \dim_H(C_k[Q_\infty, V_k], A),$$

тобто для множини  $C_k[Q_\infty, V_k]$  система циліндрів  $A$ — довірча.

Для GLS-розкладу і множини  $C'_k[GLS, V_k]$  розглянемо систему циліндрів  $n$ -го рангу

$$\begin{aligned} \Phi'_n &= \{\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{GLS}, \alpha_j \in N_0\}, \\ \Phi' &= \bigcup_{j=1}^{\infty} \Phi'_j. \end{aligned}$$

Нехай  $A'_1 = \{\Delta_{\alpha_1}^{GLS}, \alpha_1 \in V_k\}$  і  $A'_n = \{\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{GLS}, \alpha_j \in V_k, j = \overline{1, n}\}$ .

Тоді  $L_1 := ([0, 1] \setminus (\bigcup_{\alpha_1 \in V_k} \Delta_{\alpha_1}^{GLS}))^{cl}$ — об'єднання не більше як  $(k+1)$ -го відрізка

$$[a_0, b_0], [a_1, b_1], \dots, [a_{n_k}, b_{n_k}],$$

де  $b_i < a_{i+1}$  і  $n_k \leq k + 1$ .

Таким чином, відрізок  $[0, 1]$  розбивається на  $n_k$  відрізків, які належать множині  $L_1$  і на  $k$  циліндрів 1-го рангу GLS-розкладу (відрізків), що належать множині  $C'_k[GLS, V_k]$ . Позначимо ці  $(n_k + k)$  відрізків (зліва направо)

$$\tilde{\Delta}_0, \tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_{n_k+k}$$

Розглянемо  $Q'$ -розклад дійсних чисел, для якого

$$q'_i = |\tilde{\Delta}_i|.$$

Нехай  $\tilde{A}'_1 = \{\tilde{\Delta}_i : \tilde{\Delta}_i \in A'_1\}$  – множина тих відрізків, які попали в  $A'_1$ , а  $V'_k = \{i : \tilde{\Delta}_i \in A'_1\}$  – множина дозволених індексів для задання множини  $C'_k[GLS, V_k]$  в термінах  $Q'$ -розкладу. Отже, множини  $C'_k[Q^{GLS}, V_k]$  і  $C'[Q', V'_k]$  співпадають. Тому

$$\dim_H(C'_k[GLS, V_k]) = \dim_H(C'[Q', V'_k]).$$

$$\dim_H(C'_k[GLS, V_k], \Phi') = \dim_H(C'[Q', V'_k], \Phi'(Q')),$$

де  $\Phi'(Q')$  – система циліндрів  $Q'$ -розкладу. Оскільки  $\Phi'(Q')$  довірча, то

$$\dim_H(C'_k[GLS, V_k], \Phi') = \dim_H(C'[Q', V_k]) = \dim_H(C'_k[GLS, V_k]).$$

Внутрішності циліндрів з  $\Phi'_n \setminus A'_n$  не містять спільних точок з множиною  $C'_k[GLS, V_k]$ . Тому для обчислення  $\dim_H(C'_k[GLS, V_k], \Phi')$  досить розглядати покриття множини  $C'_k[GLS, V_k]$  циліндрами з сімейства

$$A' = \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n.$$

Тому

$$\dim_H(C'_k[GLS, V_k], \Phi') = \dim_H(C'_k[GLS, V_k], A').$$

Оскільки

$$\dim_H(C'_k[GLS, V_k], \Phi') = \dim_H(C'_k[GLS, V_k], \Phi'(Q')),$$

то

$$\dim_H(C'_k[GLS, V_k], A') = \dim_H(C'_k[GLS, V_k]).$$

Отже, сімейство множин  $A'$  є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича множини  $C'_k[GLS, V_k]$ .

Розглянемо  $\{E_j\}$  – довільне  $\varepsilon$ -покриття множини  $C_k[Q_\infty, V_k]$  циліндрами з системи  $A$ . Тоді  $\{E'_j\}$  буде утворювати  $\varepsilon$ -покриття множини  $C'_k[GLS, V_k]$  циліндрами з системи  $A'$ .

Оскільки перетворення  $\varphi$  відображає циліндр в циліндр і при цьому зберігає його довжину, то  $\alpha$ -об'єми будуть рівними

$$\sum |E_j|^\alpha = \sum |E'_j|^\alpha, \forall \{E_j\}.$$

Тому

$$H_\varepsilon^\alpha(C_k[Q_\infty, V_k], A) = H_\varepsilon^\alpha(C'_k[Q^{GLS}, V_k], A').$$

При переході до границі, коли  $\varepsilon \rightarrow 0$ , отримаємо

$$H^\alpha(C_k[Q_\infty, V_k], A) = H^\alpha(C'_k[GLS, V_k], A').$$

А отже,

$$\dim_H(C_k[Q_\infty, V_k], A) = \dim_H(C'_k[GLS, V_k], A').$$

Як показано вище, системи циліндрів  $A$  і  $A'$  є довірчими для обчислення  $\dim_H(C_k[Q_\infty, V_k])$ ,  $\dim_H(C'_k[GLS, V_k])$ . Тому

$$\dim_H(C_k[Q_\infty, V_k]) = \dim_H(C'_k[GLS, V_k]). \quad (2)$$

Як показано у [6],[7]

$$\dim_H(C[Q_\infty, V]) = \lim_{k \rightarrow \infty} \dim_H(C_k[Q_\infty, V_k]). \quad (3)$$

У роботі [4] доведено, що

$$\dim_H(C'[GLS, V]) = \lim_{k \rightarrow \infty} \dim_H(C'_k[GLS, V_k]). \quad (4)$$

З рівностей (2),(3) і (4) отримуємо

$$\dim_H(C[Q_\infty, V]) = \dim_H(C'[GLS, V]),$$

тобто  $\varphi$  зберігає розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини  $C[Q_\infty, V]$ .

□

### 3. ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ СПЕКТРІВ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН З НЕЗАЛЕЖНИМИ ОДНАКОВО РОЗПОДІЛЕНИМИ GLS-СИМВОЛАМИ

Покажемо як результати попереднього розділу можна використати для обчислення розмірності спектра випадкової величини з незалежними однаково розподіленими GLS-символами.

**Теорема 3.** *Нехай для фіксованої матриці  $Q_\infty$  множина  $V \subset N \cup \{0\}$ , така, що рівняння  $\sum_{i \in V} q_i^x = 1$  має корінь  $\alpha_0$  на  $[0, 1]$ . Тоді*

$$\dim_H(C[GLS, V]) = \alpha_0.$$

*Доведення.* Розглянемо відображення

$$\varphi(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_\infty}) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{GLS}.$$

При цьому очевидно, що

$$\varphi(C[Q_\infty, V]) = C[GLS, V].$$

У роботі [6] показано, що якщо рівняння  $\sum_{i \in V} q_i^x = 1$  має корінь  $\alpha_0$  на  $[0, 1]$ , то розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини  $C[Q_\infty, V]$  співпадає з коренем цього рівняння.

В теоремі 2 показано, що відображення  $\varphi$  зберігає розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини  $C[Q_\infty, V]$ . Тоді

$$\dim_H(C[Q_\infty, V]) = \dim_H(C[GLS, V]) = \alpha_0,$$

тобто  $\dim_H(C[GLS, V])$  співпадає з коренем рівняння  $\sum_{i \in V} q_i^x = 1$ , якщо це рівняння має розв'язок на  $[0, 1]$ . □

**Теорема 4.** *Нехай  $Q_\infty i V = \{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots\}$  є такими, що рівняння  $\sum_{i \in V} q_i^x = 1$  не має коренів на  $[0, 1]$ . Тоді*

$$\dim_H(C[GLS, V]) = \lim_{k \rightarrow \infty} \dim_H(C_k[GLS, V_k]),$$

де  $V_k = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ ,  $k \in N, k \geq 2$ .

*Доведення.* Розглянемо відображення

$$\varphi(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q_\infty}) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{GLS}.$$

Множини  $C_k[Q_\infty, V_k]$  самоподібні і задовольняють умову відкритої множини. Тому розмірність  $\alpha_k$  кожної з них може бути отримана як розв'язок рівняння  $\sum_{i \in V_k} q_i^x = 1$ . Як показано в [6],

$$\dim_H(C[Q_\infty, V]) = \lim_{k \rightarrow \infty} \dim_H(C_k[Q_\infty, V_k]).$$

За теоремою 2  $\varphi$  зберігає розмірність Хаусдорфа-Безиковича множин  $C_k[Q_\infty, V_k]$  і  $C[Q_\infty, V]$ , тобто

$$\dim_H(C_k[Q_\infty, V_k]) = \dim_H(C'_k[GLS, V_k]), \quad (5)$$

$$\dim_H(C[Q_\infty, V]) = \dim_H(C'[GLS, V]). \quad (6)$$

Тоді з (5) і (6) випливає

$$\dim_H(C[GLS, V]) = \lim_{k \rightarrow \infty} \dim_H(C_k[GLS, V_k]).$$

□

Теорема 3 та 4 об'єднує є наступна теорема.

**Теорема 5.** *Для довільного GLS-розкладу розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини  $C[GLS, V]$  може бути обчислена за формулою*

$$\dim_H(C[GLS, V]) = \sup\{x : \sum_{i \in V} q_i^x \geq 1\}.$$

Нехай  $\{\xi_k\}$  послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин:  
 $P(\xi_k = i) := p_i \geq 0, \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1.$

Розглянемо випадкову величину

$$\xi = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_k \dots}^{GLS}$$

і відповідну ймовірнісну міру  $\mu_\xi$  з незалежними однаково розподіленими  $GLS$ -символами.

**Означення 5.** Спектром розподілу випадкової величини  $\xi$  називається множина

$$\begin{aligned} S_\xi &= \{x : \forall \varepsilon > 0 \mu_\xi((x - \varepsilon, x + \varepsilon)) > 0\} = \\ &= \{x : \forall \varepsilon > 0 F_\xi(x + \varepsilon) - F_\xi(x - \varepsilon) > 0\}. \end{aligned}$$

Як відомо, спектр випадкової величини  $\xi$  є замкненою множиною.

**Теорема 6.** Нехай  $V := \{i : p_i > 0\}$ . Тоді спектр випадкової величини  $\xi$  є замиканням множини

$$C[GLS, V] = \{x : x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{GLS}, \alpha_j \in V, \forall j \in N\}.$$

*Доведення.* Нехай

$$C[GLS, V] = \{x : x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{GLS}, \alpha_j \in V, \forall j \in N\},$$

де  $V = \{i_1, i_2, \dots, i_k, \dots\} \subset N$ . Розглянемо випадкову величину  $\xi$  з незалежними однаково розподіленими  $GLS$ -символами задану законом

$\xi_k$	$i_1$	$i_2$	$i_3$	$\dots$	$i_k$	$\dots$
—	$p_{i_1}$	$p_{i_2}$	$p_{i_3}$	$\dots$	$p_{i_k}$	$\dots$

$$\sum_{i_k=0}^{\infty} p_{i_k} = 1.$$

1) Покажемо, що якщо  $x$  належить множині  $(C[GLS, V])^{cl}$ , то  $x$  належить спектру  $S_\xi$ .

а) Нехай  $x_0 \in C[GLS, V]$ . Тоді

$$x_0 = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{GLS}, \alpha_j \in V, \forall j \in N.$$

Для довільного  $\varepsilon > 0$  знайдеться таке  $k_0(\varepsilon)$ , що циліндр

$$\Delta_{\alpha_1(x_0) \alpha_2(x_0) \dots \alpha_{k_0(x_0)}^{GLS} \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Оскільки міра  $\mu_\xi$  ймовірнісна, то

$$\mu_\xi(\Delta_{\alpha_1(x_0) \alpha_2(x_0) \dots \alpha_{k_0(x_0)}^{GLS}) \leq \mu_\xi((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)).$$

$$\mu_\xi(\Delta_{\alpha_1(x_0) \alpha_2(x_0) \dots \alpha_{k_0(x_0)}^{GLS}) = p_{\alpha_1(x_0)} \cdot p_{\alpha_2(x_0)} \cdot \dots \cdot p_{\alpha_{k_0(x_0)}} > 0, p_{\alpha_j} > 0, \alpha_j \in V.$$

З останніх двох нерівностей випливає, що

$$\mu_\xi((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)) > 0.$$

Отже, за означенням спектра випадкової величини показали, що  $x_0$  належить до  $S_\xi$ .

б) Розглянемо випадок, коли  $x_0$  не належить множині  $C[GLS, V]$ , але належить до  $(C[GLS, V])^{cl}$ .

Якщо  $x_0 \in (C[GLS, V])^{cl}$ , то для довільного  $\varepsilon > 0$  інтервал  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  містить точки із множини  $C[GLS, V]$ . А це означає, що існує такий номер  $k_0(\varepsilon)$ , що

$$\Delta_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\dots\alpha_{k_0(x_0)}^{GLS} \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \alpha_{j(x_0)} \in V.$$

Аналогічно, до випадку а)

$$\mu_\xi(\Delta_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\dots\alpha_{k_0(x_0)}^{GLS}) = p_{\alpha_1(x_0)} \cdot p_{\alpha_2(x_0)} \cdot \dots \cdot p_{\alpha_{k_0(x_0)}} > 0, p_{\alpha_j} > 0, \alpha_j \in V$$

і

$$\mu_\xi((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)) > 0.$$

Отже, якщо  $x \in (C[GLS, V])^{cl}$ , то  $x \in S_\xi$ .

2) Покажемо, що якщо  $x$  не належить множині  $(C[GLS, V])^{cl}$ , то  $x$  не належить спектру  $S_\xi$ .

Якщо  $x_0$  не належить до  $(C[GLS, V])^{cl}$ , то точка  $x_0$  є зовнішньою для множини  $(C[GLS, V])^{cl}$  і, відповідно, для множини  $C[GLS, V]$ . Тоді,

$$x_0 \in \text{int}(C[GLS, V]).$$

Тобто,

$$x_0 = \Delta_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\dots\alpha_{k-1(x_0)}\alpha_{k(x_0)}^{GLS},$$

де  $\alpha_k$  не належить множині  $V$ . Тоді знайдеться таке  $\varepsilon > 0$ , що

$$\Delta_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\dots\alpha_{k-1(x_0)}\alpha_{k(x_0)}^{GLS} \supset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

$$\mu_\xi(\Delta_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\dots\alpha_{k-1(x_0)}\alpha_{k(x_0)}^{GLS}) \geq \mu_\xi((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)).$$

$$\mu_\xi(\Delta_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\dots\alpha_{k_0(x_0)}^{GLS}) = p_{\alpha_1(x_0)} \cdot p_{\alpha_2(x_0)} \cdot \dots \cdot p_{\alpha_{k-1}(x_0)} p_{\alpha_{k(x_0)}} = 0,$$

оскільки  $p_{\alpha_k} = 0$ . Звідси випливає, що

$$\mu_\xi((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)) = 0.$$

Отже, якщо  $x$  не належить множині  $(C[GLS, V])^{cl}$ , то  $x$  не належить спектру  $S_\xi$ .

З 1) і 2) випливає, що спектр випадкової величини  $\xi$  є замиканням множини

$$C[GLS, V] = \{x : x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}^{GLS}, \alpha_j \in V, \forall j \in N\}.$$

□

Як показано вище, множина  $\Delta_\infty^{GLS} = [0, 1] \setminus S_\xi$  може бути порожньою, скінченною, зчисленною та континуальною.

Якщо  $\Delta_\infty^{GLS}$  порожня, скінченна або зчисленна, то спектр  $S_\xi$  є самоподібною або  $N$ -самоподібною множиною і відрізняється від множин  $C[Q_\infty, V]$  і  $C[Q^{GLS}, V]$  не більш як зчисленною кількістю точок. У такому випадку можна застосувати результати розділу 2 й отримати відповідні твердження стосовно розмірності спектра  $S_\xi$ .

Нехай  $V := \{i : p_i > 0\}$ .

**Теорема 7.** *Якщо множина  $\Delta_\infty^{GLS}$  не більш як зчисленна, то для довільного  $GLS$ -розкладу породженого стохастичним вектором  $Q_\infty$  розмірність Хаусдорфа-Безиковича спектра розподілу випадкової величини  $\xi$  з незалежними однаково розподіленими  $GLS$ -символами обчислюється наступним чином.*

1) *Якщо рівняння  $\sum_{i \in V} q_i^x = 1$  має корінь  $\alpha_0$  на  $[0, 1]$ , то*

$$\dim_H S_\xi = \alpha_0.$$

2) *Якщо рівняння  $\sum_{i \in V} q_i^x = 1$  не має коренів на  $[0, 1]$ , то*

$$\dim_H S_\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k,$$

де  $\alpha_k$  – корінь рівняння  $\sum_{i \in V_k} q_i^x = 1$ ,  $V_k = V \cap \{1, 2, \dots, k\}$ .

*Доведення.* У статті [4] показано, що якщо рівняння  $\sum_{i \in V} q_i^x = 1$  має корінь  $\alpha_0$  на  $[0, 1]$ , то

$$\dim_H(C[GLS, V]) = \alpha_0$$

і якщо рівняння  $\sum_{i \in V} q_i^x = 1$  не має коренів на  $[0, 1]$ , то

$$\dim_H(C[GLS, V]) = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k,$$

де  $\alpha_k$  – корінь рівняння  $\sum_{i \in V_k} q_i^x = 1$ ,  $V_k = V \cap \{1, 2, \dots, k\}$ . У теоремі 6 доведено, що

$$S_\xi = (C[GLS, V])^{cl}.$$

Таким чином,

$$\dim_H S_\xi = \dim_H(C[GLS, V]) = \alpha_0,$$

де  $\alpha_0$  корінь рівняння  $\sum_{i \in V} q_i^x = 1$ , і

$$\dim_H S_\xi = \dim_H(C[GLS, V]) = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k,$$

якщо рівняння  $\sum_{i \in V} q_i^x = 1$  не має коренів на  $[0, 1]$ . □

**Зауваження 2.** Використовуючи міркування з роботи [4] нескладно показати, що для довільного  $GLS$ -розкладу породженого стохастичним вектором  $Q_\infty$  розмірність Хаусдорфа-Безиковича спектра розподілу випадкової величини  $\xi$  з незалежними однаково розподіленими  $GLS$ -символами обчислюється наступним чином.

$$\dim_H(S_\xi) = \sup\{x : \sum_{i: p_i > 0} q_i^x > 1\}.$$



**Зауваження 3.** Метод обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича спектрів випадкових величин з незалежними однаково розподіленими GLS-символами, який запропонований в даній статті, дозволяє обчислювати розмірність Хаусдорфа-Безиковича спектрів розподілів випадкових величин з незалежними однаково розподіленими символами загального LM-розкладу (у цьому випадку множини  $C[LM, V]$  не є, взагалі кажучи, самоподібними).

**Подяка.** Ця робота була частково підтримана науково-дослідним проектом «Багаторівневий аналіз сингулярних ймовірнісних мір та його застосування» (МОН України).

#### ЛІТЕРАТУРА

- [1] *Albeverio S., Torbin G.* Fractal properties of singularly continuous probability distributions with independent  $Q^*$ -digits. // *Bull.Sci.Math.*, **129**(2005), № 4, — 365-367.
- [2] *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G.* On fine structure of singularly continuous probability measures and random variables with independent  $\tilde{Q}$ -symbols. // *Methods of Functional Analysis and Topology*. 2011. no. 1. 97–111.
- [3] *Dajani K., Kraaikamp C.* Ergodic theory of numbers. Washington: The Mathematic Association of America, — 2002. — 190 p.
- [4] *Lupain M. L.* The fractal properties of the spectrum of random variables with independent identically distributed GLS-symbols. // submitted to "Modern Stochastics: Theory and Applications".
- [5] *Garko I. I.* On new approach to the study of fractal properties of probability measures with independent  $x - Q_\infty$ -symbols. // submitted to "Modern Stochastics: Theory and Applications".
- [6] *Нікіфоров Р. О., Торбін Г. М.* Фрактальні властивості випадкових величин з незалежними  $Q_\infty$ -символами. // *Теорія ймовір. та матем. статист.* **86**(2012), — 150-162.
- [7] *Нікіфоров Р. О., Торбін Г. М.* Про розмірність Хаусдорфа-Безиковича узагальнених самоподібних множин, породжених нескінченними IFS. // *Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* №13(1). — 2012. — 151-1632 с.
- [8] *Гарко І. І., Торбін Г. М.* Про  $x - Q_\infty$ -зображення дійсних чисел та проблеми, з ними пов'язані. // *Матеріали Міжнародної наукової конференції "Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь"* — Київ, 2012. — с. 48-50.
- [9] *Працевытый Н. В., Турбин А. Ф.* Фрактальные множества, функции распределения — Киев: Наукова думка, 1992. — 208 с.
- [10] *Torbin G.* Probability distributions with independent  $Q$ -symbols and transformations preserving the Hausdorff dimension. // *Theory of Stochastic Processes*, **13**(2007), — 281-293.
- [11] *Фещенко О. Ю.* Про символний спосіб задання функцій і розподілів ймовірностей // *Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* №5. — 2004. — 248-266 с.
- [12] *Шарковский А. Н.* Существование циклов непрерывного отображения прямой на себя // *Укр. мат. журн.* 1964. Т.16, № 1. — с. 61—71.