

УДК 511.72 + 517.51

Модифіковане $\overline{Q_3}$ -зображення дійсних чисел та його геометрія

І. В. Замрій,

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

АНОТАЦІЯ. Вивчається геометрія (властивості циліндрів та напівциліндрів) модифікації Q_3 -зображення дійсних чисел, яке є узагальненням класичного трійкового зображення. Нове зображення має нескінченний алфавіт, нульову надлишковість і може бути ефективно використаним для задання математичних об'єктів з фрактальними властивостями.

Ключові слова: модифікації Q_3 -зображення дійсних чисел, розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини.

The geometry of modified Q_3 -expansion of real numbers

I. Zamrii,

National Pedagogical Dragomanov University

ABSTRACT. In the paper was studied properties of cylinders and half-cylinders of modified Q_3 -expansion of real numbers. The new expansion has infinite alphabet and can be efficiently used for specifying mathematical objects with fractal properties.

AMS Subject Classifications (2010): 28A80

Key words: Q_3 -expansion of real numbers, Hausdorff dimension of set.

Вступ

Сьогодні розвиваються різні теорії (моделі загальної аксіоматичної теорії дійсних чисел), які є аналогами теорії Вейерштраса. Один з класів таких теорій використовує трисимвольний алфавіт $A = \{0, 1, 2\}$. Він включає і класичну теорію дійсних чисел як теорію трійкових рядів і її різні узагальнення та модифікації. Часто такі теорії ґрунтуються на уже відомій теорії дійсних чисел та ідеї іншого (нового) способу їх представлення та зображення (формального запису). Незважаючи на те, що такі системи зображення використовують класичний трійковий алфавіт $\{0, 1, 2\}$ одні з них мають нульову надлишковість (кожне число має не більше двох зображень), а інші — ненульову надлишковість, окремі числа мають нескінченну і, навіть, континуальну

кількість різних зображень, наприклад, як трійкова система з однією надлишковою цифрою. Разом з цим розвиваються теорії зображення (кодування) дійсних чисел засобами нескінченного алфавіту (типу зображення чисел елементарними ланцюговими дробами, рядами Енгеля, Люрота, Сільвестера, Остроградського, Пірса тощо [4, 5, 6, 7, 8]), своєрідним є зображення запропоноване в роботі [9]. Виявляється між системами зображення чисел зі скінченними та нескінченними алфавітами можна встановити тісний зв'язок, як це зроблено в [3] для класичної двійкової системи і системи Q_∞ -зображення.

У даній роботі ми вводимо і досліджуємо модифікацію відомого так званого Q_3 -зображення [1, 2], яке є узагальненням класичного трійкового. Нашим основним завданням є обґрунтування коректності його визначення, а також вивчення його геометрії. Під геометрією зображення ми розуміємо геометричне тлумачення символів, властивості циліндрів та напівциліндрів, а також, різні метричні відношення.

1. Q_3 -зображення дійсних чисел

Нагадаємо необхідні нам поняття і факти з теорії Q_3 -зображення [1].

Нехай $Q_3 = \{q_0, q_1, q_2\}$ — впорядкована множина додатних дійсних чисел, таких, що $q_0 + q_1 + q_2 = 1$; $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = q_0$, $\beta_2 = q_0 + q_1$.

Теорема 1. Для будь-якого $x \in [0, 1]$ існує послідовність (α_n) , $\alpha_n \in \{0, 1, 2\} \equiv A$ така, що

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right] = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_3}. \quad (1)$$

НАСЛІДОК 1. Довільне дійсне число x можна подати у вигляді

$$x = [x] + \Delta_{\alpha_1(\{x\})\alpha_2(\{x\})\dots\alpha_k(\{x\})\dots}^{Q_3},$$

де $[x]$ — ціла, а $\{x\}$ — дробова частини числа x .

Означення 1. Розклад числа x у ряд (1) називається його Q_3 -представленням, а скорочений формальний запис

$$x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{Q_3} \quad (2)$$

— Q_3 -зображенням. При цьому α_k називається k -тим Q_3 -символом числа x .

Взагалі кажучи, поняття k -ого Q_3 -символа числа є некоректно визначеним, оскільки можна довести, що $\Delta_{c_1 \dots c_{m-1} c_m(0)}^{Q_3} = \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} (c_m-1)(2)}^{Q_3}$, де (i) — період в зображенні числа з одного символу (цифри) i . Ті числа, що мають два різні зображення, називаються Q_3 -раціональними, а решта — Q_3 -іраціональними.

Означення 2. Нехай (c_1, c_2, \dots, c_k) — фіксований впорядкований набір чисел з $\{0, 1, 2\}$. Циліндром рангу k з основою (c_1, c_2, \dots, c_k) називається множина $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_k}^{Q_3}$ всіх чисел $x \in [0, 1]$, які мають наступне Q_3 -зображення

$$x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_{k+m} \dots}^{Q_3}, \quad \alpha_{k+i} \in A.$$

Циліндр $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_k}^{Q_3}$ є відрізком з кінцями $a = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_k(0)}^{Q_3}$ і $b = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_k(2)}^{Q_3}$, тобто $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_k}^{Q_3} = [a; b]$. Його внутрішність будемо позначати через $\nabla_{c_1 c_2 \dots c_k}^{Q_3}$ і називатимемо циліндричним інтервалом, тобто $\nabla_{c_1 c_2 \dots c_k}^{Q_3} = \text{int} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_k}^{Q_3} = (a, b)$.

Циліндричні множини або циліндри мають наступні властивості:

$$1) \Delta_{c_1 c_2 \dots c_k}^{Q_3} = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_k 0}^{Q_3} \cup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_k 1}^{Q_3} \cup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_k 2}^{Q_3};$$

$$2) [0, 1] = \bigcup_{i_1=0}^2 \bigcup_{i_2=0}^2 \dots \bigcup_{i_n=0}^2 \Delta_{i_1 i_2 \dots i_n}^{Q_3};$$

$$3) \max \Delta_{c_1 c_2 \dots c_k i}^{Q_3} = \min \Delta_{c_1 c_2 \dots c_k (i+1)}^{Q_3};$$

$$4) |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_k}^{Q_3}| = \prod_{i=1}^k q_{c_i} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty);$$

$$5) \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{c_1 \dots c_k}^{Q_3} = x \equiv \Delta_{c_1 \dots c_k \dots}^{Q_3} \quad \text{для довільної послідовності } (c_k), c_k \in A.$$

Властивості 1) і 2) випливають безпосередньо з означення циліндра. Властивості 3) і 4) випливають з того, що циліндр є відрізком. Властивість 5) випливає з аксіоми Кантора, оскільки кожна послідовність (α_k) , $\alpha_k \in A$, а разом з нею і послідовність відрізків $(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}^{Q_3})$, визначає єдину точку x відрізка $[0, 1]$, яку ми позначили $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{Q_3}$. І навпаки, для кожної точки $x \in (0, 1]$ існують відрізки $\Delta_{\alpha_1(x)}^{Q_3}, \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)}^{Q_3}, \dots, \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_k(x)}^{Q_3}, \dots$, які містять x і

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_k(x)}^{Q_3} \equiv \Delta_{\alpha_1(x)\dots\alpha_k(x)\dots}^{Q_3}.$$

2. Модифіковане $\overline{Q_3}$ -зображення дійсних чисел

Означення 3. Зображення

$$\overline{\Delta}_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{Q_3} \quad (3)$$

дійсного числа

$$x = \Delta_{\underbrace{0 \dots 0}_{a_1} \dots \underbrace{01 \dots 1}_{a_2} \dots \underbrace{12 \dots 2}_{a_3} \dots \underbrace{0 \dots 0}_{a_{3n-2}} \dots \underbrace{01 \dots 1}_{a_{3n-1}} \dots \underbrace{12 \dots 2}_{a_{3n}} \dots}^{Q_3}, \quad a_n \in \mathbb{Z}_0,$$

називатимемо $\overline{Q_3}$ -зображенням числа x .

Очевидно, що воно є лише модифікацією Q_3 -зображення, але на відміну від останнього використовує не трьохсимвольний алфавіт, а нескінченний алфавіт, який є множиною цілих невід'ємних чисел. У деяких випадках таке зображення є не лише більш економним, а й зручним та продуктивним.

Модифіковане $\overline{Q_3}$ -зображення дійсних чисел є цікавим, оскільки

- 1) встановлює місток між зображеннями дійсних чисел зі скінченим та нескінченим алфавітами;
- 2) на відміну від «традиційного» трійкового зображення, для нього циліндр, взагалі кажучи, не є проміжком;
- 3) циліндри не є метрично незалежними;
- 4) геометрія цього зображення не самоподібна;
- 5) воно розширює можливості для задання та дослідження математичних об'єктів з фрактальними властивостями: множин, функцій, мір, розподілів ймовірностей, динамічних систем тощо.

Розглянемо приклади $\overline{Q_3}$ -зображень чисел:

$$1) x = \overline{\Delta}_{104205}^{Q_3} = \Delta_{0 \underbrace{2222}_{a_1=1} \underbrace{00}_{a_2=0} \underbrace{22222}_{a_3=4} \underbrace{00}_{a_4=2} \underbrace{22222}_{a_5=0} \underbrace{00}_{a_6=5}}^{Q_3} = \Delta_{022220022222}^{Q_3};$$

$$2) x = \overline{\Delta}_{32104}^{Q_3} = \Delta_{\underbrace{000}_{a_1=3} \underbrace{11}_{a_2=2} \underbrace{2}_{a_3=1} \underbrace{1111}_{a_4=0} \underbrace{1111}_{a_5=4}}^{Q_3} = \Delta_{0001121111}^{Q_3};$$

$$3) x = \overline{\Delta}_{000003001}^{Q_3} = \Delta_{\underbrace{0}_{a_1=0} \underbrace{0}_{a_2=0} \underbrace{0}_{a_3=0} \underbrace{0}_{a_4=0} \underbrace{0}_{a_5=0} \underbrace{222}_{a_6=3} \underbrace{0}_{a_7=0} \underbrace{0}_{a_8=0} \underbrace{2}_{a_9=1}}^{Q_3} = \Delta_{2222}^{Q_3};$$

$$4) x = \overline{\Delta}_{100100100\dots}^{Q_3} = \overline{\Delta}_{200200200\dots}^{Q_3} = \overline{\Delta}_{300300300\dots}^{Q_3} = \dots = \overline{\Delta}_{k00m00n00\dots}^{Q_3} = \dots = \Delta_{(0)}^{Q_3}.$$

Цілоком очевидно, що останні два приклади викликають багато запитань.

Тому в модифікованому $\overline{Q_3}$ — зображенні з метою усунення некоректностей (неоднозначностей) введемо додаткові вимоги:

- у зображенні дійсного числа не може стояти підряд більше двох нулів, тобто $a_n a_{n+1} a_{n+2} \neq 000$, $n \in N$;
- для чисел, які мають періоди (0), (1) або (2) в Q_3 -зображенні, а отже мають континуальну множину різних $\overline{Q_3}$ -зображень, домовимось використовувати лише одне з них, а саме: $\Delta_{\dots(i)}^{Q_3} = \overline{\Delta}_{\dots i00i00i00\dots}^{Q_3}$, $i = 0, 1, 2$.

Після введення цих вимог довільне число $x \in [0, 1]$ має єдине $\overline{Q_3}$ -зображення.

Із-за однозначності $\overline{Q_3}$ -зображення числа символ зображення є коректно визначеною функцією числа: $a_k(x)$, яка визначає довжину k -тої серії однакових Q_3 -символів (включаючи серії нульової довжини).

Оскільки в модифікованому $\overline{Q_3}$ -зображенні дійсних чисел a_n — це довжина k -ї серії цифр i , де $n = 3k - i$ (включаючи серії нульової довжини), то перехід від Q_3 до $\overline{Q_3}$ і навпаки є достатньо простим.

Перехід від Q_3 до $\overline{Q_3}$ (тобто від послідовності (α_n) до (a_n) , $\alpha_n \in \{0, 1, 2\}$, $a_n \in \mathbb{Z}_0$):

— якщо $\alpha_n = 0$ в Q_3 -зображенні, воно належить до серії (a_{3n-2}) в модифікованому $\overline{Q_3}$ -зображенні;

— якщо $\alpha_n = 1$, то $\alpha_n \in (a_{3n-1})$;

— якщо $\alpha_n = 2$, то $\alpha_n \in (a_{3n})$.

Перехід від $\overline{Q_3}$ до Q_3 , тобто від послідовності символів (a_n) до послідовності символів (α_n) , $\alpha_n \in A$, $a_n \in \mathbb{Z}_0$ здійснюється за наступним алгоритмом:

$$\alpha_1 = f_1(a_1, a_2) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } a_1 \neq 0, \\ 1, & \text{якщо } a_1 = 0, a_2 \neq 0, \\ 2, & \text{якщо } a_1 = 0, a_2 = 0; \end{cases}$$

$$\alpha_2 = f_2(a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } a_1 \geq 2, \\ 1, & \text{якщо } a_1 \in 0, 1, a_2 \neq 0, \\ 2, & \text{якщо } a_1, a_2 \in 0, 1, a_3 \neq 0; \end{cases}$$

і т.д., тобто

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0, \quad \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_{a_1} = 0, \\ \alpha_{a_1+1} &= 1, \quad \alpha_{a_1+2} = 1, \dots, \alpha_{a_1+a_2} = 1, \\ \alpha_{a_1+a_2+1} &= 2, \dots, \alpha_{a_1+a_2+a_3} = 2, \dots \end{aligned}$$

3. Циліндричні множини та їх властивості

Означення 4. Циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$, $c_i \in \mathbb{Z}_0$, називається множина виду

$$\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_3} = \{x : a_k(x) = c_k, k = \overline{1, m}\},$$

де $a_k(x)$ — це k -й символ модифікованого $\overline{Q_3}$ -зображення числа x .

Внутрішність циліндра будемо позначати через $\overline{\nabla}_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_3}$ і називатимемо циліндричним інтервалом, тобто $\overline{\nabla}_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_3} = \text{int} \overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_3}$.

Лема 1. *Циліндри мають наступні властивості:*

$$\begin{aligned} 1) \quad \overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_3} &= \bigcup_{m=1}^{\infty} \overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m c}; \\ 2) \quad \overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_3} &= \underbrace{\overline{\Delta}_{c_1 \dots 0 1 \dots 1}^{Q_3}}_{c_1} \underbrace{\overline{\Delta}_{c_2 \dots 1 \dots 1}^{Q_3}}_{c_2} \dots \underbrace{\overline{\Delta}_{c_m \dots \alpha \dots \alpha}^{Q_3}}_{c_m} \cup \underbrace{\overline{\Delta}_{c_1 \dots 0 1 \dots 1}^{Q_3}}_{c_1} \underbrace{\overline{\Delta}_{c_2 \dots 1 \dots 1}^{Q_3}}_{c_2} \dots \underbrace{\overline{\Delta}_{c_m \dots \alpha \dots \alpha}^{Q_3}}_{c_m} \alpha \gamma, \quad \text{де } \beta \neq \alpha \neq \gamma, \end{aligned}$$

$\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1, 2\}$;

$$3) \quad \overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_3} = \overline{\Delta}_{s_1 s_2 \dots s_k}^{Q_3}, \quad \text{тоді і тільки тоді, коли всі } c_i = s_i, \quad m, k \in \mathbb{N};$$

$$4) \quad \overline{\nabla}_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_3} \neq \overline{\nabla}_{s_1 s_2 \dots s_k}^{Q_3}, \quad \text{якщо хоча б одне з } c_i \neq s_i, \quad m, k \in \mathbb{N};$$

5) для міри Лебега має місце рівність

$$\lambda(\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_3}) = \begin{cases} \sum_{k=1}^m c_{3k-2} \cdot \sum_{k=1}^{m-2} c_{3k-1} \cdot \sum_{k=1}^{m-1} c_{3k} \cdot (1 - q_0), & m \in (3k - 2), \\ \sum_{k=1}^{m-1} c_{3k-2} \cdot \sum_{k=1}^m c_{3k-1} \cdot \sum_{k=1}^{m-2} c_{3k} \cdot (1 - q_1), & m \in (3k - 1), \\ \sum_{k=1}^{m-2} c_{3k-2} \cdot \sum_{k=1}^{m-1} c_{3k-1} \cdot \sum_{k=1}^m c_{3k} \cdot (1 - q_2), & m \in (3k), \end{cases}$$

де $m, k \in \mathbb{N}$;

6) $\lambda(\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_3}) \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$) для $(c_n) \in A^\infty$;

7) $\bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_3} \equiv \overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m \dots}^{Q_3} = x \in [0, 1]$;

8) основне метричне відношення має наступний вигляд

$$\frac{\lambda(\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_3})}{\lambda(\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_3})} = \begin{cases} \frac{q_1^c(1 - q_1)}{(1 - q_0)}, & \text{якщо } m \in (3k - 2), \\ \frac{q_2^c(1 - q_2)}{(1 - q_1)}, & \text{якщо } m \in (3k - 1), \text{ де } m, k \in \mathbb{N}, \\ \frac{q_0^c(1 - q_0)}{(1 - q_2)}, & \text{якщо } m \in (3k); \end{cases}$$

9) діаметр циліндра визначається за формулою

$$\text{diam}(\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_3}) = \begin{cases} \sum_{k=1}^m c_{3k-2} \cdot \sum_{k=1}^{m-2} c_{3k-1} \cdot \sum_{k=1}^{m-1} c_{3k} \cdot (1 - q_0), & m \in (3k - 2), \\ \sum_{k=1}^{m-1} c_{3k-2} \cdot \sum_{k=1}^m c_{3k-1} \cdot \sum_{k=1}^{m-2} c_{3k} \cdot 1, & m \in (3k - 1), \\ \sum_{k=1}^{m-2} c_{3k-2} \cdot \sum_{k=1}^{m-1} c_{3k-1} \cdot \sum_{k=1}^m c_{3k} \cdot (1 - q_2), & m \in (3k); \end{cases}$$

10) $\text{diam}(\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_3}) \geq \lambda(\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_3})$.

Властивість 1) впливає безпосередньо з означення циліндру. Властивість 2) впливає із означення циліндру та зв'язку між $\overline{Q_3}$ і Q_3 -зображеннями дійсного числа. Властивості 3) і 4) очевидні в силу єдиності модифікованого $\overline{Q_3}$ -зображення довільного дійсного числа x з $[0, 1]$. Із властивості 2) видно, що циліндр в модифікованому $\overline{Q_3}$ -зображенні є об'єднанням двох неперетинних Q_3 -циліндрів, тобто міра Лебега $\lambda(\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_3})$ визначається як сума довжин таких вкладених Q_3 -циліндрів. І знаючи ранг $\overline{Q_3}$ -циліндру, тобто відомо останні дві цифри $\alpha_i : \alpha_i \in (a_{3k+i})$, $i \in A$ у вкладених Q_3 -циліндрах, можна обчислити його міру Лебега за властивістю 5). Властивість 6) впливає з 5) при $m \rightarrow \infty$. Циліндр рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$ — це послідовність вкладених компактів, а їх перетин визначає єдину точку $x \in [0, 1]$ (властивість

7)). Основне метричне відношення отримаємо підставивши значення міри Лебега при фіксованому значенні m . Властивість 9) впливає з 2) і 5), а 10) впливає з 5) і 9).

4. Напівциліндри

Нехай $\overline{\Delta}_{c_1}^{k_1}$ — множина всіх чисел, які на k_1 -ому місці модифікованого $\overline{Q_3}$ -розкладу мають фіксовану цифру c_1 , тобто $\overline{\Delta}_{c_1}^{k_1} \equiv \{x : a_{k_1}(x) = c_1\}$.

Якщо $k_1 = 1$, то множина $\overline{\Delta}_{c_1}^{k_1}$ є циліндром $\overline{\Delta}_{c_1}^{Q_3}$.

Очевидно, що множина $\overline{\Delta}_{c_1}^{k_1}$ чисел з $[0, 1]$, для яких k_1 -ша цифра має конкретне значення c_1 , є об'єднанням циліндричних множин: $\overline{\Delta}_{c_1}^{k_1} = \bigcup_{\substack{(a_1, \dots, a_{k_1-1}) \\ a_i \in \mathbb{Z}_0}} \overline{\Delta}_{a_1 \dots a_{k_1-1} c_1}^{Q_3}$.

Тому міра Лебега визначається як сума довжин цих циліндрів, тобто

$$\lambda(\overline{\Delta}_{c_1}^{k_1}) = \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_{k_1-1}) \\ a_i \in \mathbb{Z}_0}} \lambda\left(\overline{\Delta}_{a_1 \dots a_{k_1-1} c_1}^{Q_3}\right).$$

Розглянемо такі множини і відповідну їм міру Лебега.

Спочатку розглянемо випадок, коли $c_1 \in \mathbb{N}$.

$$\overline{\Delta}_1^1 = \Delta_0^1, \lambda(\overline{\Delta}_1^1) = \lambda(\Delta_0^1) = q_0;$$

$$\overline{\Delta}_2^1 = \Delta_{00}^{12}, \lambda(\overline{\Delta}_2^1) = \lambda(\Delta_{00}^{12}) = q_0 \cdot q_0 = q_0 = \lambda(\Delta_0^1) \cdot \lambda(\Delta_0^2);$$

$$\overline{\Delta}_c^1 = \Delta_{00 \dots 0}^{12 \dots c}, \lambda(\overline{\Delta}_c^1) = \lambda(\Delta_{00 \dots 0}^{12 \dots c}) = q_0^c;$$

$$\overline{\Delta}_1^4 = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_m 0} = \Delta_0^{m+1}, \quad m = \sum_{i=1}^4 a_i, \quad \lambda(\overline{\Delta}_1^4) = \lambda(\Delta_0^{m+1}) = q_0(q_0 + q_1 + q_2)^m = q_0;$$

$$\overline{\Delta}_1^{3k-2} = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_m 0} = \Delta_0^{m+1}, \quad \text{де } m = \sum_{i=1}^{3k-2} a_i, \quad \lambda(\overline{\Delta}_1^{3k-2}) = \lambda(\Delta_0^{m+1}) = q_0;$$

$$\overline{\Delta}_c^{3k-2} = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1} \underbrace{0 \dots 0}_c} = \Delta_{0 \dots 0}^{m \dots m+c}, \quad \text{де } m-1 = \sum_{i=1}^{3k-2} a_i, \quad \lambda(\overline{\Delta}_c^{3k-2}) = \lambda(\Delta_{0 \dots 0}^{m \dots m+c}) = q_0^c.$$

Якщо аналогічно розглянути множини $\overline{\Delta}_1^2, \overline{\Delta}_2^2, \dots, \overline{\Delta}_1^{3k-1}, \dots, \overline{\Delta}_c^{3k-1}; \overline{\Delta}_1^3, \overline{\Delta}_2^3, \dots, \overline{\Delta}_1^{3k}, \dots, \overline{\Delta}_c^{3k}$, то отримаємо $\lambda(\overline{\Delta}_1^2) = q_1$ і $\lambda(\overline{\Delta}_1^3) = q_2$. Отже,

$$\lambda(\overline{\Delta}_c^{3k-1}) = q_1^c, \quad \lambda(\overline{\Delta}_c^{3k}) = q_2^c.$$

Лема 2. Для міри Лебега множини $\overline{\Delta}_{c_1}^{k_1}$ при $c_1 \in \mathbb{N}$, $\alpha_m \in A$, де $m = \sum_{i=1}^{k_1-1} a_i + 1$ має місце:

$$\lambda(\overline{\Delta}_{c_1}^{k_1}) = q_{\alpha_m}^{c_1}.$$

ДОВЕДЕННЯ. Скористаємося переходом від $\overline{Q_3}$ до Q_3 , отримаємо

$$\overline{\Delta}_{c_1}^{k_1} = \Delta_{\underbrace{0 \dots 0}_{a_1} \underbrace{1 \dots 1}_{a_2} \underbrace{2 \dots 2}_{a_3} \dots \underbrace{b \dots b}_{c_1}} = \Delta_b^{m_1 \dots m_{c_1}},$$

де $\alpha_{m+j}(x) = b \in A$, $j = \overline{1, c_1}$, $m_1 = \sum_{i=1}^{k_1-1} a_i + 1$ і $m_{i+1} = m_i + 1$.

Міра Лебега множини $\Delta_b^{m_1 \dots m_{c_1}}$ вже відома і вона визначається з рівності

$$\lambda(\Delta_b^{m_1 \dots m_{c_1}}) = q_b^{c_1}.$$

А оскільки множини $\Delta_b^{m_1 \dots m_{c_1}}$ і $\overline{\Delta}_{c_1}^{k_1}$ еквівалентні, то $\lambda(\overline{\Delta}_{c_1}^{k_1}) = q_b^{c_1}$. \square

Розглянемо тепер випадок, коли $c_1 = 0$.

$$\overline{\Delta}_0^1 = \Delta_1^1 \cup \Delta_2^1, \lambda(\overline{\Delta}_0^1) = \lambda(\Delta_1^1 \cup \Delta_2^1) = q_1 + q_2 = \lambda(\Delta_1^1) + \lambda(\Delta_2^1);$$

$$\overline{\Delta}_0^2 = \Delta_0^m \cup \Delta_2^m, m = a_1 + 1, \lambda(\overline{\Delta}_0^2) = \lambda(\Delta_0^m \cup \Delta_2^m) = q_0 + q_2 = \lambda(\Delta_0^m) + \lambda(\Delta_2^m);$$

$$\overline{\Delta}_0^{3k-2} = \Delta_1^m \cup \Delta_2^m, m = \sum_{i=1}^{3k-3} a_i + 1,$$

$$\lambda(\overline{\Delta}_0^{3k-2}) = \lambda(\Delta_0^m \cup \Delta_2^m) = q_1 + q_2 = \lambda(\Delta_0^m) + \lambda(\Delta_2^m) \text{ і т.д.}$$

Лема 3. Для міри Лебега множини $\overline{\Delta}_0^{k_1}$ має місце рівність:

$$\lambda(\overline{\Delta}_0^{k_1}) = \begin{cases} q_1 + q_2, & \text{якщо } k_1 \in (3k - 2), \\ q_0 + q_2, & \text{якщо } k_1 \in (3k - 1), \\ q_0 + q_1, & \text{якщо } k_1 \in (3k). \end{cases}$$

ДОВЕДЕННЯ. Скористаємося переходом від \overline{Q}_3 до Q_3 , отримаємо

$$\overline{\Delta}_0^{k_1} = \underbrace{\Delta_0 \dots 0}_{a_1} \underbrace{1 \dots 1}_{a_2} \underbrace{2 \dots 2}_{a_3} \dots \underbrace{\alpha}_{c_1=0} \beta \cup \underbrace{\Delta_0 \dots 0}_{a_1} \underbrace{1 \dots 1}_{a_2} \underbrace{2 \dots 2}_{a_3} \dots \underbrace{\alpha}_{c_1=0} \gamma = \Delta_\beta^{m_1} \cup \Delta_\gamma^{m_1},$$

де $\beta \neq \alpha \neq \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in A$ і $m_1 = \sum_{i=1}^{k_1} a_i + 1$.

Відомо, що $\lambda(\Delta_\beta^{m_1}) = q_\beta$ і $\lambda(\Delta_\gamma^{m_1}) = q_\gamma$. І оскільки $\nabla_\beta^{m_1} \cap \nabla_\gamma^{m_1} = \emptyset$, то

$$\lambda(\Delta_\beta^{m_1} \cup \Delta_\gamma^{m_1}) = q_\beta + q_\gamma = \lambda(\Delta_\beta^{m_1}) + \lambda(\Delta_\gamma^{m_1}).$$

Як відомо із зв'язку між послідовностями (α_n) і (a_n) , якщо $\alpha_n = 0$, то $\alpha_n \in (a_{3n-2})$. Очевидно, якщо $k_1 \in (3n - 2)$, то $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$ і $\lambda(\overline{\Delta}_0^{k_1}) = q_1 + q_2$. Аналогічно, якщо $k_1 \in (3n - 1)$, то $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 2$ і $\lambda(\overline{\Delta}_0^{k_1}) = q_0 + q_2$; якщо $k_1 \in (3n)$, то $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$ і $\lambda(\overline{\Delta}_0^{k_1}) = q_0 + q_1$.

Лему доведено. \square

НАСЛІДОК 2. $\lambda(\overline{\Delta}_0^{k_1}) = \lambda(\Delta_\beta^{m_1} \cup \Delta_\gamma^{m_1}) = \lambda(\Delta_\beta^{m_1}) + \lambda(\Delta_\gamma^{m_1})$, де $m_1 = \sum_{i=1}^{k_1} a_i + 1$, $\beta \neq \gamma \in A$.

Лема 4. Множина $\overline{\Delta}_{c_1}^{k_1}$ має міру Лебега, яка визначається з рівності:

$$\lambda(\overline{\Delta}_{c_1}^{k_1}) = q_\alpha^{c_1} (q_\beta + q_\gamma)^{f(c_1)}, \quad f(c_1) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } c_1 \in \mathbb{N}, \\ 1, & \text{якщо } c_1 = 0, \end{cases}$$

де $\beta \neq \alpha \neq \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in A$ і $\alpha = \alpha_{m+j}(x)$, $j = \overline{1, c_1}$, $m = \sum_{i=1}^{k_1-1} a_i + 1$.

ДОВЕДЕННЯ. Лема 4 впливає з лем 2 і 3, коли $c_1 \in \mathbb{Z}_0$. \square

Множина $\overline{\Delta}_{c_1 c_2}^{k_1 k_2}$ складається з чисел відрізка $[0, 1]$, які в модифікованому $\overline{Q_3}$ -розкладі мають k_1 -шу цифру c_1 і k_2 -гу цифру c_2 ($k_1 < k_2$).

Розглянемо приклади:

$$1) \lambda(\overline{\Delta}_{11}^{12}) = \lambda(\Delta_0^1 \cap \Delta_1^2) = q_0 \cdot q_1 = \lambda(\Delta_0^1) \cdot \lambda(\Delta_1^2);$$

$$2) \lambda(\overline{\Delta}_{ts}^{23}) = \lambda(\Delta_1^{m_1} \cap \dots \cap \Delta_{t-1}^{m_t} \cap \Delta_2^{m_2} \cap \dots \cap \Delta_{s-1}^{m_s}) = q_1^t \cdot q_2^s = \lambda(\Delta_1^{m_1}) \cdot \dots \cdot \lambda(\Delta_1^{m_t}) \cdot \lambda(\Delta_2^{m_2}) \cdot \dots \cdot \lambda(\Delta_2^{m_s}),$$

де $m_1 = \sum_{i=1}^{t-1} a_i + 1$, $m_2 = \sum_{j=1}^{s-1} a_j + 1$ і $m_{i+1} = m_i + 1$;

$$3) \lambda(\overline{\Delta}_{20}^{12}) = \lambda(\Delta_0^1 \cap \Delta_0^2 (\Delta_0^3 \cup \Delta_2^3)) = q_0^2 \cdot (q_0 + q_2) = \lambda(\Delta_0^1) \cdot \lambda(\Delta_0^2) (\lambda(\Delta_0^3) + \lambda(\Delta_2^3)).$$

Лема 5. Для міри Лебега множини $\overline{\Delta}_{c_1 c_2}^{k_1 k_2}$ має місце рівність:

$$\lambda(\overline{\Delta}_{c_1 c_2}^{k_1 k_2}) = q_{\alpha_1}^{c_1} (q_{\beta_1} + q_{\gamma_1})^{f(c_1)} \cdot q_{\alpha_2}^{c_2} (q_{\beta_2} + q_{\gamma_2})^{f(c_2)}, \quad f(c_i) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } c_i \in \mathbb{N}, \\ 1, & \text{якщо } c_i = 0, \end{cases}$$

де $\beta_i \neq \alpha_i \neq \gamma_i$, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in A$, $\alpha_i = \alpha_{m_i}(x)$, $\beta_i, \gamma_i = \alpha_{m_i+1}(x)$, $m_i = \sum_{j=1}^{k_i-1} a_j + 1$, $i = \overline{1, 2}$.

ДОВЕДЕННЯ. Очевидно, що $\overline{\Delta}_{c_1 c_2}^{k_1 k_2} = \overline{\Delta}_{a_1 \dots a_{k_1-1} c_1 a_{k_1+1} \dots a_{k_2-1} c_2 \dots}$ і у випадку $c_i \in \mathbb{Z}_0$ справедлива рівність: $\overline{\Delta}_{c_1 c_2}^{k_1 k_2} = \overline{\Delta}_{c_1}^{k_1} \cap \overline{\Delta}_{c_2}^{k_2}$.

Оскільки $\beta_i \neq \alpha_i \neq \gamma_i$, то очевидно, що $\overline{\Delta}_{c_1}^{k_1} \cap \overline{\Delta}_{c_2}^{k_2} = \emptyset$. Згідно з лемою 4 для міри Лебега справедливо

$$\lambda(\overline{\Delta}_{c_1 c_2}^{k_1 k_2}) = q_{\alpha_1}^{c_1} (q_{\beta_1} + q_{\gamma_1})^{f(c_1)} \cdot q_{\alpha_2}^{c_2} (q_{\beta_2} + q_{\gamma_2})^{f(c_2)} = \lambda(\overline{\Delta}_{c_1}^{k_1}) \cdot \lambda(\overline{\Delta}_{c_2}^{k_2}),$$

де $f(c_i) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } c_i \in \mathbb{N}, \\ 1, & \text{якщо } c_i = 0, \end{cases}$

$\beta_i \neq \alpha_i \neq \gamma_i$, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in A$, $\alpha_i = \alpha_{m_i}(x)$, $\beta_i, \gamma_i = \alpha_{m_i+1}(x)$, $m_i = \sum_{j=1}^{k_i-1} a_j + 1$, $i = \overline{1, 2}$.

Тоді очевидно, що твердження теореми вірне. \square

НАСЛІДОК 3. $\lambda(\overline{\Delta}_{c_1 c_2}^{k_1 k_2}) = \lambda(\overline{\Delta}_{c_1}^{k_1}) \cdot \lambda(\overline{\Delta}_{c_2}^{k_2})$.

Узагальнимо результати і розглянемо множину $\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^{k_1 k_2 \dots k_m}$.

Означення 5. Множина $\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^{k_1 k_2 \dots k_m} = \{x : a_{k_i}(x) = c_i, i = \overline{1, m}\}$ називається напівциліндром з основою $\begin{pmatrix} k_1 k_2 \dots k_m \\ c_1 c_2 \dots c_m \end{pmatrix}$.

Теорема 2. Міра Лебега напівциліндра $\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^{k_1 k_2 \dots k_m}$ обчислюється за формулою:

$$\lambda(\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^{k_1 k_2 \dots k_m}) = \prod_{i=1}^m q_{\alpha_i}^{c_i} (q_{\beta_i} + q_{\gamma_i})^{f(c_i)}, \quad f(c_i) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } c_i \in \mathbb{N}, \\ 1, & \text{якщо } c_i = 0, \end{cases}$$

де $\beta_i \neq \alpha_i \neq \gamma_i$, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in A$, $\alpha_i = \alpha_{n_i}(x)$, $\beta_i, \gamma_i = \alpha_{n_i+1}(x)$, $n_i = \sum_{j=1}^{k_i-1} a_j + 1$, $i = \overline{1, m}$.

ДОВЕДЕННЯ. Проведемо доведення методом математичної індукції.

1) Якщо $i = 1$, тобто розглядається множина $\overline{\Delta}_{c_1}^{k_1}$, то дане твердження співпадає з лемою 4.

2) Якщо $i = 2$, тобто розглядається множина $\overline{\Delta}_{c_1 c_2}^{k_1 k_2}$, то твердження є лемою 5.

3) Припустимо, що дане твердження виконується для $i = m$, тобто — для напівциліндра $\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^{k_1 k_2 \dots k_m}$, і перевіримо його істинність для $i = m + 1$. Справді, згідно з

припущенням і лемою 4 при $n = \sum_{j=1}^{k_{m+1}-1} a_j + 1$ маємо

$$\begin{aligned} \lambda(\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m c_{m+1}}^{k_1 k_2 \dots k_m k_{m+1}}) &= \lambda(\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^{k_1 k_2 \dots k_m} \cap \overline{\Delta}_{c_{m+1}}^{k_{m+1}}) = \\ &= \prod_{i=1}^m q_{\alpha_i}^{c_i} (q_{\beta_i} + q_{\gamma_i})^{f(c_i)} \cdot q_{\alpha_n}^{c_{m+1}} (q_{\beta_n} + q_{\gamma_n})^{f(c_{m+1})} = \prod_{i=1}^{m+1} q_{\alpha_i}^{c_i} (q_{\beta_i} + q_{\gamma_i})^{f(c_i)}. \end{aligned}$$

Отже, теорема справедлива для довільного натурального m . \square

Лема 6. *Напівциліндричні множини є метрично незалежними, тобто*

$$\lambda(\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^{k_1 k_2 \dots k_m}) = \lambda(\overline{\Delta}_{c_1}^{k_1}) \cdot \lambda(\overline{\Delta}_{c_2}^{k_2}) \cdot \dots \cdot \lambda(\overline{\Delta}_{c_m}^{k_m}), \text{ при } k_i \neq k_j.$$

ДОВЕДЕННЯ. Для довільного набору (c_1, c_2, \dots, c_m) , $c_i \in \mathbb{Z}_0$ з означення напівциліндра випливає рівність

$$\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^{k_1 k_2 \dots k_m} = \overline{\Delta}_{c_1}^{k_1} \cap \overline{\Delta}_{c_2}^{k_2} \cap \dots \cap \overline{\Delta}_{c_m}^{k_m}.$$

Тому, враховуючи попередню теорему, маємо:

$$\lambda(\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^{k_1 k_2 \dots k_m}) = \lambda(\overline{\Delta}_{c_1}^{k_1} \cap \overline{\Delta}_{c_2}^{k_2} \cap \dots \cap \overline{\Delta}_{c_m}^{k_m}) = \lambda(\overline{\Delta}_{c_1}^{k_1}) \cdot \lambda(\overline{\Delta}_{c_2}^{k_2}) \cdot \dots \cdot \lambda(\overline{\Delta}_{c_m}^{k_m}),$$

що й вимагалось довести. \square

5. Множина чисел з послідовністю фіксованих $\overline{Q_3}$ -символів

Означення 6. Нехай (c_m) — задана послідовність цілих невід'ємних чисел. Множиною чисел з послідовністю фіксованих $\overline{Q_3}$ -символів називають множину виду:

$$\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m \dots}^{k_1 k_2 \dots k_m \dots} = \{x : x = \overline{\Delta}_{a_1 a_2 \dots a_m \dots}^{Q_3}, a_{k_m}(x) = c_m, m \in \mathbb{N}\}.$$

Із властивостей напівциліндрів випливає

$$\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m \dots}^{k_1 k_2 \dots k_m \dots} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^{k_1 k_2 \dots k_m}.$$

Теорема 3. Міра Лебега множини $\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m \dots}^{k_1 k_2 \dots k_m \dots}$ чисел з послідовністю фіксованих $\overline{Q_3}$ -символів рівна нулю, тобто

$$\lambda(\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m \dots}^{k_1 k_2 \dots k_m \dots}) = 0.$$

ДОВЕДЕННЯ. Нехай $\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m \dots}^{k_1 k_2 \dots k_m \dots} = K$ і $\bigcap_{i=1}^m \overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_i}^{k_1 k_2 \dots k_i} = K_m$. Тоді очевидно, що

$$K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots \supset K_m \supset \dots \supset K,$$

тобто $K \subset K_m$ і $\lambda(K) \leq \lambda(K_m)$ для всіх $m \in \mathbb{N}$. Маємо

$$\lambda(\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m \dots}^{k_1 k_2 \dots k_m \dots}) \leq \lambda\left(\bigcap_{i=1}^m \overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_i}^{k_1 k_2 \dots k_i}\right) \rightarrow 0.$$

Отже, $\lambda(\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m \dots}^{k_1 k_2 \dots k_m \dots}) = 0$. Що і треба було довести. \square

Теорема 4. Множина $\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m \dots}^{k_1 k_2 \dots k_m \dots}$ чисел з послідовністю фіксованих $\overline{Q_3}$ -символів є:

- 1) точкою $\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m \dots}^{Q_3}$, якщо $k_m - k_{m-1} = 1$, $m \in \mathbb{N}$ для всіх m і $k_1 = 1$;
- 2) ніде не щільною множиною при $k_m - k_{m-1} > 1$, $m \in \mathbb{N}$.

ДОВЕДЕННЯ. 1) Якщо $k_1 = 1$ і $k_m - k_{m-1} = 1$ для довільного $m \in \mathbb{N}$, то напівциліндр $\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^{k_1 k_2 \dots k_m}$ є циліндром $\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m} \overline{Q_3}$ -зображення при всіх $m \in \mathbb{N}$. Тому множина $\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m \dots}^{k_1 k_2 \dots k_m \dots}$ є точкою.

2) Якщо $k_m - k_{m-1} = 1$ починаючи з деякого номера $p > 1$, то множина $\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m \dots}^{k_1 k_2 \dots k_m \dots}$ є зліченною. У випадку $k_m - k_{m-1} > 1$ для нескінченної множини номерів m , множина із послідовністю фіксованих $\overline{Q_3}$ -символів є континуальною. Тобто при $k_m - k_{m-1} > 1$, $m \in \mathbb{N}$ довільну кількість разів, множина $\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m \dots}^{k_1 k_2 \dots k_m \dots}$ є ніде не щільною. \square

Література

- [1] Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
- [2] Турбин А. Ф., Працевитий Н. В. Фрактальные множества, функции, распределения. К.: Наукова думка, 1992. — 208 с.
- [3] Лисенко І. М., Працьовитий М. В. Модифікація класичного двійкового зображення // Єдність навчання і наукових досліджень – головний принцип університету: Збірник наукових праць звітної-наукової конференції викладачів університету за 2011 рік, 9-10 лютого 2012 року. Частина 2./ Укл. Г.І.Волинка, О.В.Уваркіна, О.П.Симоненко, О.П.Ємельянова.— К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. — 10-13 с.
- [4] Гетьман Б. І. Метричні властивості множини чисел, визначених умовами на їх розклад в ряд Енгеля // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2009. — № 10. — 88-99 с.

- [5] Працьовита І. М., Задніпр'яний М. В. Розклади чисел в ряди Сільвестера та їх застосування // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2009. — № 10. — 73-87 с.
- [6] Дмитренко С. О., Кюрчев Д. В., Працьовитий М. В. Ланцюгове A_2 -зображенням дійсних чисел та його геометрія // Укр. мат. журн. — 2009, Т. 61, №4 — 452-463 с.
- [7] Жижарева І. Ю., Працьовитий М. В. Зображення чисел знакододатними рядами Люрота: основи метричної теорії // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2008. — № 9. — 200-211 с.
- [8] Zhykharyeva Yulia, Pratsiovytyi Mykola Expansions of numbers in positive Luroth series and their applications to metric, probabilistic and fractal theories of numbers // Algebra and Discrete Mathematics, Volume 14 (2012). Number 1. pp. 145-160.
- [9] Працьовитий М. В., Фещенко О. Ю. Математичні моделі двосторонніх динамічних конфліктів і Q -представлення дійсних чисел // Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2003. — № 4. — 260-269 с.

References

- [1] Pratsiovytyj M., *Fraktalnyi pidhid u doslidzhennjah synguljarnyh rozpodiliv (Fractal approach to investigations of singular distributions)*, Kyiv, 1998, 296 p.
- [2] Turbin A., Pratsiovytyi M., *Fraktalnye mnozhestva, funktsii, rasspredeleniya (Fractal sets, functions, and distributions)*, Naukova Dumka, Kiev, 1992, 208 p.
- [3] Lysenko I., Pratsiovytyi M., *Jednist' navchannja i naukovykh doslidzen' – golovnyj pryncyp uni-versytetu: Zbirnyk naukovykh prac' zvitno-naukovoї konferencii' vykladachiv universytetu za 2011 rik, 9-10 ljutogo 2012 roku*, Vol. 2, 2012, pp. 10-13.
- [4] Getman B., *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1: Fiz-mat. nauky (Transactions of Dragomanov National Pedagogical University. Series 1: Phys.- Math. Sciences)*, 2009, №10, pp. 88-99.
- [5] Pratsiovyta I., Zadnirjanyj M., *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1: Fiz-mat. nauky (Transactions of Dragomanov National Pedagogical University. Series 1: Phys.- Math. Sciences)*, 2009, №10, pp. 73-87.
- [6] Dmytrenko S., Kyurchev D., *Ukrai'ns'kyj matematychnyj zhurnal (Ukrainian Mathematical Journal)*, 2009, №4, pp. 452-463.
- [7] Zhykharyeva I., Pratsiovytyi M., *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1: Fiz-mat. nauky (Transactions of Dragomanov National Pedagogical University. Series 1: Phys.- Math. Sciences)*, 2008, №9, pp. 200-211.
- [8] Zhykharyeva Yu., Pratsiovytyi M., *Algebra and Discrete Mathematics*, 2012, Vol. 14, №1, pp. 145-160.
- [9] Pratsiovytyi M., Feschenko O., *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1: Fiz-mat. nauky (Transactions of Dragomanov National Pedagogical University. Series 1: Phys.- Math. Sciences)*, 2003, №4, pp. 260-269.