

Про асимптотичне розвинення розв'язків сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь другого порядку з виродженням у точці

М. І. Шкіль

(Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова)

АНОТАЦІЯ. Запропоновано метод побудови локальних асимптотичних формул для розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь другого порядку у випадку, коли виродження настає в одній точці.

ABSTRACT. We propose the method of construction of local asymptotic formulae for solutions of system of linear differential equations of second order in the case if degeneracy is in a single point.

1. Дослідженню сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь, в тому числі і рівнянь другого порядку, присвячено багато робіт. Їх бібліографію можемо знайти в монографії [1]. Останнім часом все більше з'являються роботи, у яких досліджуються системи диференціальних рівнянь з виродженою матрицею при похідній. Такі системи вивчаються, наприклад, в монографії [2]. Однак, в даній монографії і ряді робіт інших авторів розглянуто випадок, коли матриця при похідній є виродженою на всьому проміжку зміни незалежної змінної. У цьому разі вихідна лінійна система диференціальних рівнянь розкладається на дві підсистеми, одна з яких є алгебраїчною, а друга — диференціальною. У кінцевому результаті приходимо до сингулярно збуреної диференціальної системи з меншим числом рівнянь.

Якщо виродженість настає в одній чи кількох ізольованих точках, то наведені вище результати не можуть бути застосованими.

В роботі [3] для сингулярно збурених лінійних систем диференціальних рівнянь першого порядку запропоновано метод побудови локальних асимптотичних формул для розв'язків у випадку, коли виродження настає в одній точці.

В даній роботі метод [3] узагальнюється на системи лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

2. Розглянемо задачу Коші:

$$\varepsilon^2 E(t) \frac{d^2 x}{dt^2} = \varepsilon A(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} + B(t, \varepsilon)x + \varepsilon f(t, \varepsilon), \quad (1)$$

$$x(0, \varepsilon) = x_0, \quad x'(0, \varepsilon) = x'_0, \quad (2)$$

де $x = x(t, \varepsilon)$, $f(t, \varepsilon)$, x_0 , x'_0 — n -вимірні вектори, $A(t, \varepsilon)$, $B(t, \varepsilon)$ — $(n \times n)$ -матриці, $E(t)$ — діагональна $(n \times n)$ -матриця вигляду:

$$E(t) = \left\{ \underbrace{1, \dots, 1}_n, \underbrace{t^{P_1}, t^{P_2}, \dots, t^{P_r}}_r \right\}, \quad (3)$$

$P_i > 0$ ($i = \overline{1, r}$) — раціональні числа, ε ($0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$) — малий параметр. Матриця $E(t)$, як це випливає з (3) в точці $t = 0$ стає виродженою.

Накладемо умови:

1°) Матриці $A(t, \varepsilon)$, $B(t, \varepsilon)$, $C(t, \varepsilon)$ і вектор $f(t, \varepsilon)$ в області $D(0 \leq t \leq L, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0)$ є неперервними;

2°) існують скінченні границі:

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ (t > 0)}} (E^{-1}(t)A(t, \varepsilon)) = A(\varepsilon),$$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ (t > 0)}} (E^{-1}(t)B(t, \varepsilon)) = B(\varepsilon) \neq O, \quad (4)$$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ (t > 0)}} (E^{-1}(t)f(t, \varepsilon)) = f(\varepsilon),$$

де $E^{-1}(t)$ — обернена матриця до матриці $E(t)$ (при $t > 0$ $E^{-1}(t)$ існує), O — нульова матриця.

При $t > 0$ $t \in (0; L]$ систему (1) можна записати у вигляді

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 x}{dt^2} = \varepsilon \tilde{A}(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} + \tilde{B}(t, \varepsilon)x + \varepsilon \tilde{f}(t, \varepsilon), \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{A}(t, \varepsilon) &= E^{-1}(t)A(t, \varepsilon), \\ \tilde{B}(t, \varepsilon) &= E^{-1}(t)B(t, \varepsilon), \\ \tilde{f}(t, \varepsilon) &= E^{-1}(t)f(t, \varepsilon). \end{aligned} \quad (6)$$

Згідно умов (4) та принципу неперервності [4], існує окіл точки $t = 0$ ($0 \leq t \leq \delta$, $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$) такий, що $\forall t \in [0; \delta(\varepsilon)]$ вірними є рівності:

$$\begin{aligned} \tilde{A}(t, \varepsilon) &= A(\varepsilon) + \Omega(t, \varepsilon), \\ \tilde{B}(t, \varepsilon) &= B(\varepsilon) + \Gamma(t, \varepsilon), \\ \tilde{f}(t, \varepsilon) &= f(\varepsilon) + \gamma(t, \varepsilon). \end{aligned} \quad (7)$$

причому мають місце наступні оцінки:

$$\|\Omega(t, \varepsilon)\| \leq \varepsilon^\alpha b, \quad \|\Gamma(t, \varepsilon)\| \leq \varepsilon^\alpha b, \quad \|\gamma(t, \varepsilon)\| \leq \varepsilon^\alpha b \quad (8)$$

де $\alpha \geq 1$ — довільне дійсне число, $b > 0$ — дійсне число, яке не залежить від ε .

Тоді внаслідок (7) систему (5) можна записати у такому вигляді:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 x}{dt^2} = \varepsilon A(\varepsilon) \frac{dx}{dt} + B(\varepsilon)x + \varepsilon f(\varepsilon) + \varepsilon \Omega(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} + \Gamma(t, \varepsilon)x + \varepsilon \beta(t, \varepsilon). \quad (9)$$

Від системи (9) перейдемо до системи $2n$ диференціальних рівнянь, ввівши наступні позначення:

$$x = y_1, \quad \varepsilon \frac{dx}{dt} = y_2. \quad (10)$$

Матимемо

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = Ay + \varepsilon F + \Phi(t, \varepsilon)y + \varepsilon R(t, \varepsilon), \quad (11)$$

де y , F , $R(t, \varepsilon)$ — $2n$ -вимірні вектори

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \frac{dx}{dt} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ f(\varepsilon) \end{bmatrix}, \quad R(t, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta(t, \varepsilon) \end{bmatrix},$$

0 — нульовий n -вимірний вектор; A , $\Phi(t, \varepsilon)$ — $(2n \times 2n)$ матриці вигляду:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & E_n \\ B(\varepsilon) & A(\varepsilon) \end{bmatrix}, \quad \Phi(t, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \Gamma(t, \varepsilon) & \Omega(t, \varepsilon) \end{bmatrix}, \quad (12)$$

E_n — одинична матриця розмірів $(n \times n)$, 0 — нульова матриця розмірів $(n \times n)$.

Надалі досліджуватимемо систему диференціальних рівнянь (11). З цією метою розглянемо однорідну матричну систему:

$$\varepsilon \frac{dY}{dt} = AY \quad (13)$$

із сталими коефіцієнтами. Рівняння (13) має нормальну фундаментальну систему розв'язків

$$Y = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} At\right). \quad (14)$$

Тоді підстановка

$$y = Yz \quad (15)$$

зводить систему диференціальних рівнянь (11) до еквівалентної системи інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} y = & \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} At\right) y_0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} A(t-t_1)\Phi(t_1, \varepsilon)y(t_1, \varepsilon)dt_1\right) + \\ & + \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} A(t-t_1)\right) dt_1 F + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} A(t-t_1)R(t_1, \varepsilon)\right) dt_1, \end{aligned} \quad (16)$$

де

$$Y_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ \varepsilon x'_0 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Далі припускатимемо виконання умови:

3^o) характеристичні числа матриці A прості і їх дійсні частини недодатні. Тоді існують числа $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ і $c_3 > 0$, які не залежать від ε і такі, що для $\forall t, t_1 \in [0; \delta]$ і $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$, $0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon_1$ мають місце оцінки:

$$\begin{aligned} \left\| \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} At \right) \right\| &\leq c_1, \\ \left\| \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} A(t - t_1) \Phi(t_1, \varepsilon) \right) \right\| &\leq c_2 \varepsilon^\alpha, \\ \left\| \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} A(t - t_1) R(t_1, \varepsilon) \right) \right\| &\leq c_3 \varepsilon^\alpha. \end{aligned} \quad (18)$$

Тому із співвідношення (17) отримуємо оцінку:

$$\|y\| \leq c_2 \varepsilon^{\alpha-1} \int_0^t y(t_1, \varepsilon) dt + c_3, \quad 0 \leq t \leq \delta \leq L, \quad (19)$$

де

$$c_3 = c_1 \|y_0\| + c_2 \|F\| \delta. \quad (20)$$

Застосовуючи до нерівності (19) відому лему Беллмана [7], отримуємо

$$\|y(t, \varepsilon)\| \leq c_3 e \varepsilon_0^{\alpha-1} c_2 L. \quad (21)$$

Отже, розв'язок $y(t, \varepsilon)$ системи (11) з початковою умовою $y(0, \varepsilon) = y_0$ є обмеженим для будь-яких $t \in [0; \delta]$, $0 < \delta \leq L$, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$, $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$. Тому враховуючи (17), отримані вище результати, можна сформулювати у вигляді теореми.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови 1^o)-3^o), то існує відрізок $[0; \delta] \subset [0; L]$ ($\delta = \delta(\varepsilon) > 0$) – число, яке визначається співвідношеннями (4)) такий, що для будь-яких $t \in [0; \delta]$ і $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1)$, $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, розв'язок системи диференціальних рівнянь (11) можна зобразити у вигляді асимптотичної формули:*

$$y(t, \varepsilon) = \left(\exp \left(\frac{1}{\varepsilon} At \right) + O(e^{\alpha-1}) \right) y_0 + \int_0^t \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} A(t - t_1) \right) dt_1 F. \quad (22)$$

3. Наведемо приклади.

Приклад 1. Розглянемо випадок, коли в системі (1) $E(t)$ є скалярною матрицю

$$E(t) = t^p E_n, \quad (23)$$

E_n — одинична матриця, $p \geq 1$ — натуральне число, і нехай матриці $A(t, \varepsilon)$, $B(t, \varepsilon)$ і вектор $f(t, \varepsilon)$ в околі точки $t = 0$ мають неперервні похідні по t до порядку $p + 1$ включно і похідні в точці $t = 0$ задовольняють умовам:

$$\begin{aligned} A(0, \varepsilon) = A'(0, \varepsilon) = \dots = A^{(p-1)}(0, \varepsilon) = 0; \quad A^{(p)}(0, \varepsilon) \neq 0, \\ B(0, \varepsilon) = B'(0, \varepsilon) = \dots = B^{(p-1)}(0, \varepsilon) = 0; \quad B^{(p)}(0, \varepsilon) \neq 0, \\ f(0, \varepsilon) = f'(0, \varepsilon) = \dots = f^{(p-1)}(0, \varepsilon) = 0; \quad f^{(p)}(0, \varepsilon) \neq 0, \end{aligned} \quad (24)$$

В цьому випадку границі (4) існують і дорівнюють:

$$\begin{aligned} A(\varepsilon) &= \frac{1}{p!} A^{(p)}(0, \varepsilon), \\ B(\varepsilon) &= \frac{1}{p!} B^{(p)}(0, \varepsilon), \\ f(\varepsilon) &= \frac{1}{p!} f^{(p)}(0, \varepsilon), \end{aligned} \quad (25)$$

Тоді асимптотична формула (22) залишається вірною і для цього випадку, у якій матриця A і вектор F мають вигляд:

$$A = \left\| \begin{array}{cc} 0 & E_n \\ \frac{1}{p!} B^{(p)}(0, \varepsilon) & \frac{1}{p!} A^{(p)}(0, \varepsilon) \end{array} \right\|, \quad F = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{p!} f^{(p)}(0, \varepsilon) \end{array} \right]. \quad (26)$$

Зауваження. Асимптотична формула (22) є локальною: вірною в околі $0 \leq t \leq \delta$ точки $t = 0$. Однак, якщо матриці $A(t, \varepsilon)$, $B(t, \varepsilon)$ і вектор $f(t, \varepsilon)$ на відрізку $0 \leq t \leq L$ мають неперервні похідні до порядку $m + 1$ ($m \geq p$) включно і виконуються умови (24), то за принципом неперервності [4], в деякому разі, поклавши при $t = 0$

$$\begin{aligned} A(t, \varepsilon)t^{-p} &= \frac{1}{p!} A^{(p)}(0, \varepsilon), \\ B(t, \varepsilon)t^{-p} &= \frac{1}{p!} B^{(p)}(0, \varepsilon), \\ f(t, \varepsilon)t^{-p} &= \frac{1}{p!} f^{(p)}(0, \varepsilon), \end{aligned} \quad (27)$$

і використавши метод роботи [6], у розглядуваному випадку для розв'язку системи диференціальних рівнянь (1) можна отримати асимптотичну формулу на всьому відрізку $[0; L]$.

Проведемо дане дослідження на прикладі.

Приклад 2. Розглянемо задачу Коші для скалярного рівняння:

$$\varepsilon^2 t^p \frac{d^2 x}{dt^2} = \varepsilon a(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} + b(t, \varepsilon) x \quad (28)$$

і початкові умови:

$$x(0, \varepsilon) = x_0, \quad x'(0, \varepsilon) = x'_0, \quad (29)$$

$p \geq 1$ — натуральне число, $\varepsilon > 0$ — малий параметр.

Нехай виконуються умови:

а) функції $a(t, \varepsilon)$, $b(t, \varepsilon)$ — нескінченне число раз диференційовні по t на відрізку $0 \leq t \leq L$ і мають розвинення:

$$a(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s a_s(t), \quad b(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} b_s(t); \quad (30)$$

б)

$$\begin{aligned} a(0, \varepsilon) = a'(0, \varepsilon) = \dots = a^{(p-1)}(0, \varepsilon) = 0; \quad a^{(p)}(0, \varepsilon) \neq 0, \\ b(0, \varepsilon) = b'(0, \varepsilon) = \dots = b^{(p-1)}(0, \varepsilon) = 0; \quad b^{(p)}(0, \varepsilon) \neq 0, \end{aligned} \quad (31)$$

Тоді рівняння (28) за допомогою підстановок

$$x = y_1, \quad \varepsilon x' = y_2$$

можна записати у вигляді системи

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = A(t, \varepsilon)y,$$

у якій

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad A(t, \varepsilon) = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ a(t, \varepsilon)t^{-p} & b(t, \varepsilon)t^{-p} \end{array} \right\|. \quad (32)$$

Згідно умов б) вірними при $t > 0$ є рівності:

$$\begin{aligned} a(t, \varepsilon)t^{-p} &= \frac{1}{p!}a^{(p)}(0, \varepsilon) + \frac{t}{(p+1)!}a^{(p+1)}(0, \varepsilon) + \frac{t^2}{(p+2)!}a^{(p+2)}(0, \varepsilon) + \dots, \\ b(t, \varepsilon)t^{-p} &= \frac{1}{p!}b^{(p)}(0, \varepsilon) + \frac{t}{(p+1)!}b^{(p+1)}(0, \varepsilon) + \frac{t^2}{(p+2)!}b^{(p+2)}(0, \varepsilon) + \dots \end{aligned} \quad (33)$$

Переходячи в рівностях (33) до границі при $t \rightarrow 0$, отримуємо

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} (a(t, \varepsilon)t^{-p}) &= \frac{1}{p!}a^{(p)}(0, \varepsilon), \\ \lim_{t \rightarrow 0} (b(t, \varepsilon)t^{-p}) &= \frac{1}{p!}b^{(p)}(0, \varepsilon), \end{aligned} \quad (34)$$

Тому матриця A в рівностях (12) набирає вигляду

$$A = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \frac{1}{p!}a^{(p)}(0, \varepsilon) & \frac{1}{p!}b^{(p)}(0, \varepsilon) \end{array} \right\|. \quad (35)$$

І якщо матриця A задовольняє умову 3^o , то згідно теореми для розв'язку системи (33) отримаємо асимптотичну формулу

$$y = \exp \left(\left(\frac{1}{\varepsilon} At \right) + O(\varepsilon^{\alpha-1}) \right) y_0,$$

яка є вірною для $\forall t \in [0, \delta]$ і $\forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_1)$ ($\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$).

Щоб отримати асимптотику на всьому відрізку $[0; L]$, потрібно матрицю (32) розвинути в ряд за степенями параметра ε :

$$A(t, \varepsilon) = A_0(t) + \varepsilon A_1(t) + \dots \quad (36)$$

і до отриманої таким чином системи застосувати методи роботи [6]. Дані методи в тісній мірі залежать від поведінки коренів характеристичного рівняння

$$\det \|A_0(t) - \lambda E_n\| = 0.$$

Так, якщо корені $\lambda_i(t)$ ($i = \overline{1, n}$) прості на відрізку $[0; L]$, то згідно [6] система диференціальних рівнянь (33) з початковою умовою $y(0, \varepsilon) = y_0$ має розв'язок, для якого $\forall t \in [0; L]$ і $\forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ вірною є асимптотична формула:

$$y = \left(U_m(t, \varepsilon) \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \Lambda_m(t_1, \varepsilon) dt_1 \right) + O(\varepsilon_m) \right) y_0, \quad (37)$$

де

$$U_m(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^m \varepsilon^s U_s(t), \quad (38)$$

$$\Lambda_m(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^m \varepsilon^s \Lambda_s(t).$$

Метод побудови матриць $U_s(t)$, $\Lambda_s(t)$ наведений в [6].

В [6] досліджуються також випадки кратних коренів характеристичного рівняння (37).

4. Отримані вище результати можна узагальнити на системи диференціальних рівнянь більш загального вигляду. Розглянемо систему вигляду

$$\varepsilon^2 D(t) \frac{d^2 x}{dt^2} = \varepsilon A(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} + B(t, \varepsilon)x + \varepsilon f(t, \varepsilon), \quad x(0, \varepsilon) = x_0, \quad x'(0, \varepsilon) = x'_0, \quad (39)$$

де x , $A(t, \varepsilon)$, $B(t, \varepsilon)$ — задовольняють умову 1^о), а матриця $D(t)$ стає особливою в одній внутрішній точці $t = c \in (0; L)$, тобто рівняння

$$\det D(t) = 0$$

має лише один ізольований корінь $x = c$.

Припускаємо, що існують скінченні границі

$$\lim_{\substack{t \rightarrow c \\ (t > c)}} (D^{-1}(t)A(t, \varepsilon)) = \tilde{A}(\varepsilon) \neq 0,$$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow c \\ (t > c)}} (D^{-1}(t)B(t, \varepsilon)) = \tilde{B}(\varepsilon) \neq 0, \quad (40)$$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow c \\ (t > c)}} (D^{-1}(t)f(t, \varepsilon)) = \tilde{f}(\varepsilon) \neq 0,$$

де $D^{-1}(t)$ — обернена матриця до $D(t)$ ($D^{-1}(t)$ існує при $t \in (0; L)$).

Тоді, як наслідок, із теореми 1 випливає наступна теорема.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови 1^о), 3^о), (40), то існує окіл $[c, c + \delta']$, ($0 < \delta' < L - c$) точки c , що для $\forall t \in [c, c + \delta']$ правильною є асимптотична формула (22), у якій матрицю A і вектор F потрібно замінити відповідно на матрицю \tilde{A} і вектор \tilde{F} :*

$$\tilde{A} = \left\| \begin{array}{cc} 0 & E_n \\ \tilde{B}(\varepsilon) & \tilde{A}(\varepsilon) \end{array} \right\|, \quad \tilde{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{f}(\varepsilon) \end{bmatrix},$$

(в умові 3^о) матрицю A замінити на матрицю \tilde{A}).

Література

- [1] *Фещенко С.Ф., Шкіль Н.И., Николенко Л.Д.* Асимптотические методы дифференциальных уравнений. — Київ: Наукова думка, 1996. — 250 с.
- [2] *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища школа, 2000. — 294 с.
- [3] *Шкіль М.І.* Про локальні асимптотичні розвинення розв'язків сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженням у точці // Нелінійні коливання. — 2009, т. 12, № 2. — С. 279-285.
- [4] *Фихтенгольц Г.И.* Основы математического анализа: В 3 т. — М.: Гостехтеориздат, 1956. т.1. — 215 с.
- [5] *Беллман Ф.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во иностр. лит., 1954. — 215 с.
- [6] *Шкіль М.І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. — Київ: Вища школа, 1971. — 225 с.
- [7] *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. — М.: Иност. лит., 1954. — 215 с.