Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2009, № 10.— С. 14–27.

УДК 517.13

Множина неповних сум знакозмінного ряду Люрота та розподіли ймовірностей на ній

М. В. Працьовитий, Ю. В. Хворостіна
(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова)

Анотація. У даній роботі описано тополого-метричні та фрактальні властивості множини неповних сум довільного заданого знакозмінного ряду Люрота. Доведено, що випадкова неповна сума заданого знакозмінного ряду Люрота з незалежними доданками має або чисто дискретний, або чисто сингулярний розподіл канторівського типу. Знайдено достатні умови, при яких функція розподілу випадкової неповної суми зберігає фрактальну розмірність.

Abstract. Metric, topological and fractal properties of sets of incomplete sums of an arbitrary alternating Luroth series are described in this paper. It is also proven that a random incomplete sum of a given alternating Luroth series with independent addends has either purely discrete or purely singularly continuous distribution of the Cantor type. Sufficient conditions under which the probability distribution function of a random incomplete sum preserves the fractal dimension are also found.

1. Вступ

В математиці та її застосуваннях використовуються різні системи подання та зображення дійсних чисел. Одні з них використовують скінченний, а інші — нескінченний алфавіт (набір цифр або символів). Одні мають нульову надлишковість (кожне число має не більше двох зображень), інші — нульову (число має кілька або нескінченну кількість зображень). Одні мають просту ("самоподібну") геометрію, інші — складну ("несамоподібну" і навіть не асимпотитично самоподібну). Але в переважній більшості зображень застосовується класичний канторівський принцип використання фундаментальних послідовностей, на зразок s-кового зображення.

Одну сім'ю зображень з нескінченним алфавітом утворюють зображення чисел ланцюговими дробами та рядами, членами яких є числа, обернені до натуральних.

Це зображення чисел знакододатними рядами: Енгеля [**14**], Люрота [**4**], [**7**], Сільвестера [**15**] та знакозмінними рядами: Остроградського-Серпінського-Пірса [**14**], Люрота [**5**], Остроградського 2-го виду [**4**], [**13**]. Їх спільною особливістю є те, що вони моделюють дійсне число з числа натурального (число, що зображається, є сумою ряду з чисел, обернених до натуральних). Всі ці зображення мають, взагалі кажучи, різну геометрію (геометричне значення цифр, властивості циліндричних множин, метричні співвідношення тощо). Топологія ж усіх зображень знакозмінними рядами є однаковою і спільною з зображенням чисел ланцюговим дробом.

Дана робота стосується моделі дійсного числа у формі знакозмінного ряду чисел, обернених до натуральних, який називається *знакозмінним рядом Люрота.*

Ще в 1883 році Люрот [**4**] (напевно, під впливом ідей Кантора [**3**]) ввів такі зображення. Вони епізодично фігурували в різні періоди в роботах різних авторів, їм присвячено кілька робіт і сучасних дослідників, наприклад [**5**], [**6**], [**8**], [**2**]. Але систематичного викладу тополого-метричної, фрактальної і ймовірнісної теорій зображень чисел знакозмінними рядами Люрота сьогодні не існує. Плануючи його здійснити, в даній роботі ми будуємо теорію рядів вказаного вигляду. Основним об'єктом дослідження в ній є заданий ряд, його елементи і множина підсум (неповних сум). Вивчаються тополого-метричні і фрактальні властивості останньої.

2. Означення і приклади

Означення 1. Знакозмінний ряд вигляду

$$\frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1+1)\dots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n} + \dots, \text{ де } a_n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

називається *знакозмінним рядом Люрота*, а число a_n — n-тим елементом.

Найпростішими прикладами знакозмінних рядів Люрота є наступні ряди

1)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a} - \frac{1}{a(a+1)a} + \frac{1}{a(a+1)a(a+1)a} - \dots = \\ &= \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2(a+1)} + \frac{1}{a^3(a+1)^2} - \frac{1}{a^4(a+1)^3} + \dots = \\ &= \frac{\frac{1}{a}}{1 + \frac{1}{a(a+1)}} = \frac{a+1}{a^2+a+1}, \quad \text{де } a \in N. \end{aligned}$$

2)

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{1(1+1)\cdot 2}+\frac{1}{1(1+1)\cdot 2(2+1)\cdot 3}-\dots=$$
$$=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2\cdot 3^2}-\frac{1}{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2}+\dots=$$
$$=\frac{1}{(1!)^2}-\frac{1}{(2!)^2}+\frac{1}{(3!)^2}-\dots(-1)^{n+1}\frac{1}{(n!)^2}+\dots=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2}=1-J_0(2),$$

де $J_\nu(z)=\dfrac{z^\nu}{2^\nu}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dfrac{z^{2k}}{z^{2k}k!\Gamma(\nu+k+1)}$ – функція Бесселя.

Лема 1. *Знакозмінні ряди Люрота утворюють континуальну множину.*

Доведення. Елементи знакозмінного ряду Люрота є натуральними числами. Тому послідовність (a_n) пробігає всю континуальну множину $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\dots$. Кожна така послідовність задає знакозмінний ряд Люрота. Отже, множина знакозмінних рядів Люрота є континуальною множиною. □

3. Збіжність та часткові суми знакозмінних рядів Люрота

Теорема 1. *Кожний знакозмінний ряд Люрота абсолютно збіжний і його сума*
s
належить інтервалу $(0;1)$.

Доведення. Застосуємо ознаку Даламбера збіжності довільного числового ряду

$$D_n^*=\frac{|d_{n+1}|}{|d_n|},$$

$$D_n^*=\frac{a_1(a_1+1)\cdot\ldots\cdot a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n}{a_1(a_1+1)\cdot\ldots\cdot a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n(a_n+1)a_{n+1}}=\frac{1}{(a_n+1)a_{n+1}},$$

$$D^*=\lim_{n\to\infty}D_n^*=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(a_n+1)a_{n+1}}<1.$$

Отже, за ознакою Даламбера знакозмінний ряд Люрота абсолютно збіжний для будь-якого $a_n\in N$.

Оскільки, члени ряду монотонно спадають по абсолютній величині і прямують до нуля, то сума s цього ряду $0<s<\frac{1}{a_1}$.

Отже, сума ряду Люрота належить інтервалу $(0;1)$ □

Лема 2. *Різні знакозмінні ряди Люрота мають різні суми.*

Доведення. Використаємо метод від супротивного.

Припустимо, що існують два різні знакозмінні ряди Люрота, які мають однакову суму рівну s. Нехай $a_1, a_2, a_3, \ldots$ елементи першого ряду і $a'_1, a'_2, a'_3, \ldots$ елементи другого ряду. Оскільки ряди різні, то існує такий номер m, що $a_m \neq a'_m$ при $i = m$ і $a_i = a'_i$ при $i < m$. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що $a_m < a'_m$.

Знайдемо різницю цих рядів

$$\left(\frac{1}{a_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_1(a_1+1)\ldots a_n(a_n+1)a_{n+1}}\right) - \left(\frac{1}{a'_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a'_1(a'_1+1)\ldots a'_n(a'_n+1)a'_{n+1}}\right) =$$
$$= \pm \frac{1}{a_1(a_1+1)\ldots a_{m-1}(a_{m-1}+1)} \cdot \alpha, \quad \text{де}$$

$$\alpha = \left(\frac{1}{a_m} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_m(a_m+1)\ldots a_{m+n}(a_{m+n}+1)a_{m+n+1}}\right) -$$
$$- \left(\frac{1}{a'_m} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a'_m(a'_m+1)\ldots a'_{m+n}(a'_{m+n}+1)a'_{m+n+1}}\right) >$$
$$> \left(\frac{1}{a_m} - \frac{1}{a_m(a_m+1)\cdot a_{m+1}}\right) - \frac{1}{a'_m} \geq \left(\frac{1}{a_m} - \frac{1}{a_m(a_m+1)}\right) - \frac{1}{a_m+1} =$$
$$= \frac{a_m+1-1-a_m}{a_m(a_m+1)} = 0.$$

Звідси випливає, що $s - s \neq 0$. Отримали суперечність.

Отже, не існують двох таких різних знакозмінних рядів Люрота, які б мали однакову суму. □

Нехай s — сума знакозмінного ряду Люрота (1), s_n — його часткова сума і r_n — його залишок. Тоді

$$s_n = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1+1)\ldots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n},$$
$$r_n = (-1)^n \left(\frac{1}{a_1(a_1+1)\ldots a_n(a_n+1)a_{n+1}} - \frac{1}{a_1(a_1+1)\ldots a_{n+1}(a_{n+1}+1)a_{n+2}} + \ldots\right),$$
$$s = s_n + r_n = s_n + \frac{(-1)^n}{a_1(a_1+1)\ldots a_n(a_n+1)} \cdot x_n,$$

де

$$x_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+1}(a_{n+1}+1)a_{n+2}} + \ldots + \tag{2}$$
$$+ \frac{(-1)^{k-1}}{a_{n+1}(a_{n+1}+1)\ldots a_{n+k-1}(a_{n+k-1}+1)a_{n+k}} + \ldots .$$

За означенням 1 ряд (2) є знакозмінним рядом Люрота.

Лема 3. *Якщо s — сума знакозмінного ряду Люрота* (1), *s_n — його часткова сума, то*

$$a_1 = \left[\frac{1}{s}\right], \tag{i}$$

$$a_{n+1} = \left[\frac{1}{x_n}\right] = \left[\frac{(-1)^n}{(s-s_n)a_1(a_1+1)\dots a_n(a_n+1)}\right], \tag{ii}$$

де

$$x_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+1}(a_{n+1}+1)a_{n+2}} + \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{a_{n+1}(a_{n+1}+1)\dots a_{n+k-1}(a_{n+k-1}+1)a_{n+k}} + \dots.$$

Доведення. Оскільки члени знакозмінного ряду Люрота монотонно спадають по абсолютній величині і прямують до нуля, то справедлива наступна нерівність

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2} < s < \frac{1}{a_1}.$$

Враховуючи, що елементи ряду (1) натуральні числа, маємо

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1+1)} \le \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2}.$$

Отже,

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1+1)} = \frac{1}{a_1+1} < s < \frac{1}{a_1},$$

$$a_1 < \frac{1}{s} < a_1 + 1, \quad a_1 = \left[\frac{1}{s}\right].$$

Таким чином, частина (i) леми 3 доведена.

Так як x_n є сумою знакозмінного ряду Люрота, то за частиною (i) леми 3 маємо

$$a_{n+1} = \left[\frac{1}{x_n}\right].$$

Враховуючи рівність

$$s = s_n + \frac{(-1)^n}{a_1(a_1+1)\dots a_n(a_n+1)} \cdot x_n,$$

отримаємо вираз

$$a_{n+1} = \left[\frac{(-1)^n}{(s-s_n)a_1(a_1+1)\dots a_n(a_n+1)}\right].$$

Лему доведено. □

4. Неповні суми знакозмінного ряду Люрота

Для спрощення запису введемо наступні позначення для будь-якого $n \in \mathbb{N}$

$$A_1 = a_1, \qquad A_n = a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)...a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n.$$

Звідси $A_n = A_{n-1} \cdot (a_{n-1}+1)a_n$.

Тоді знакозмінний ряд Люрота матиме наступний вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{A_n}.$$

Зафіксуємо знакозмінний ряд Люрота з сумою r

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{A_n} = r. \tag{3}$$

Число r можна записати у вигляді

$$r = d - b, \quad \text{де} \quad d = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{A_{2i-1}}, \quad b = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{A_{2i}}.$$

Оскільки знакозмінний ряд Люрота збігається абсолютно, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_n} = d + b.$$

Означення 2. Якщо ряд (3) — заданий знакозмінний ряд Люрота, M - фіксована підмножина натуральних чисел, то число

$$x = x(M) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\varepsilon_n}{A_n}, \text{ де} \tag{4}$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n \in M, \\ 0, & \text{якщо } n \notin M. \end{cases}$$

називається *неповною сумою знакозмінного ряду Люрота.*

Вираз (4) і його суму x формально зображатимемо у вигляді $\Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_n...}$.

Зрозуміло, що всі часткові суми і залишки ряду Люрота є неповними сумами. Також неповними сумами є d і $-b$. Очевидно, що d є найбільшою неповною сумою, а $(-b)$ — найменшою.

Означення 3. Множина

$$C_r = \left\{ x : x = \sum_{n \in M \subset N}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{A_n}, \quad M \in \sigma(N) \right\},$$

де $\sigma(N)$ — множина всіх підмножин множини N, називається *множиною неповних сум ряду Люрота.*

Нехай $c_1, c_2, \ldots, c_m$ — фіксований набір нулів та одиниць.

Означення 4. *Циліндром рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$* називається множина $\Delta'_{c_1\ldots c_m}$ всіх неповних сум, які мають зображення

$$\Delta_{c_1\ldots c_m\varepsilon_{m+1}\ldots\varepsilon_{m+j}\ldots}, \quad \varepsilon_{m+j}\in\{0,1\}, \quad j\in N.$$

Означення 5. *Циліндричним відрізком рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$* називається відрізок $\Delta_{c_1\ldots c_m}$, кінці якого співпадають з нижньою і верхньою гранями циліндра $\Delta'_{c_1\ldots c_m}$.

Відрізки

$$\Delta_0=\left[-b;\, d-\frac{1}{A_1}\right] \quad \text{і} \quad \Delta_1=\left[-b+\frac{1}{A_1};\, d\right]$$

називаються *циліндричними відрізками 1-го рангу*

$$|\Delta_0|=|\Delta_1|=d+b-\frac{1}{A_1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{A_n}.$$

$$\Delta'_0\subset\Delta_0, \quad \Delta'_1\subset\Delta_1, \quad C_r\subset\Delta'_0\cup\Delta'_1\subset\Delta_0\cup\Delta_1.$$

Розглянемо $k_1=|[-b,d]\backslash(\Delta_0\cup\Delta_1)|$.

$$k_1=\left(-b+\frac{1}{A_1}\right)-\left(d-\frac{1}{A_1}\right)=\frac{2}{A_1}-d-b=\frac{1}{A_1}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{A_n}\geq$$

$$\geq\frac{1}{A_1}\left(1-\frac{1}{a_1+1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\ldots\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{A_1}\left(1-\frac{2}{a_1+1}\right)\geq 0.$$

Отже, $\Delta_0\cap\Delta_1=\varnothing$ крім випадку, коли $a_n=1$ для всіх $n\in\mathbb{N}$.

Циліндричними відрізками 2-го рангу називаються відрізки

$$\Delta_{00}=\left[-b+\frac{1}{A_2};\, d-\frac{1}{A_1}\right] \; \Delta_{01}=\left[-b;\, d-\frac{1}{A_1}-\frac{1}{A_2}\right]$$

$$\Delta_{10}=\left[-b+\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2};\, d\right] \; \Delta_{11}=\left[-b+\frac{1}{A_1};\, d-\frac{1}{A_2}\right]$$

$$|\Delta_{00}|=|\Delta_{01}|=|\Delta_{10}|=|\Delta_{11}|=d+b-\frac{1}{A_1}-\frac{1}{A_2}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{A_n}.$$

$$\Delta'_{00}\subset\Delta_{00}\subset\Delta_0, \quad \Delta'_{01}\subset\Delta_{01}\subset\Delta_0,$$

$$\Delta'_{10}\subset\Delta_{10}\subset\Delta_1, \quad \Delta'_{11}\subset\Delta_{11}\subset\Delta_1.$$

$$k_2 = |\Delta_0 \backslash (\Delta_{01} \cup \Delta_{00})| = |\Delta_1 \backslash (\Delta_{11} \cup \Delta_{10})| = |\Delta_0| - 2|\Delta_{00}| =$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{A_n} - 2\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{A_n} = \frac{1}{A_2} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{A_n} \geq \frac{1}{A_2}\left(1 - \frac{2}{a_2+1}\right) \geq 0.$$

Значить, $\Delta_{00} \cap \Delta_{01} = \varnothing$, $\Delta_{10} \cap \Delta_{11} = \varnothing$ крім випадку, коли $a_n = 1$ для всіх $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$.

Циліндричний відрізок рангу m можна подати наступним чином

$$\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_m} = [-b + u_m;\, d - v_m], \quad \text{де}$$
$$u_m = \sum_{i:2i-1 \leq m} \frac{c_{2i-1}}{A_{2i-1}} + \sum_{i:2i \leq m} \frac{1 - c_{2i}}{A_{2i}}$$
$$v_m = \sum_{i:2i-1 \leq m} \frac{1 - c_{2i-1}}{A_{2i-1}} + \sum_{i:2i \leq m} \frac{c_{2i}}{A_{2i}}$$

Лема 4. *Циліндричні відрізки мають властивості:*

1. $\Delta'_{c_1 c_2 \ldots c_m} \subset \Delta_{c_1 c_2 \ldots c_m}$;
2. $\Delta_{c_1 \ldots c_m c_{m+1}} \subset \Delta_{c_1 \ldots c_m}$;
3. $|\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_m}| = d + b - \sum\limits_{n=1}^{m} \dfrac{1}{A_n} = \sum\limits_{n=m+1}^{\infty} \dfrac{1}{A_n} =$
$$= \frac{1}{A_m(a_m+1)} \left(\frac{1}{a_{m+1}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_{m+1}(a_{m+1}+1) \ldots a_{m+i}(a_{m+i}+1) a_{m+i+1}} \right) \leq$$
$$\leq \frac{1}{2^m} \cdot 2 = \frac{1}{2^{m-1}} \to 0 \ (m \to \infty);$$
4. $\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_{m-1} 0} \bigcap \Delta_{c_1 c_2 \ldots c_{m-1} 1} = \varnothing$, *крім випадку коли всі* $a_n = 1$, *починаючи з* m *місця. Причому*
$$k_m = |\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_{m-1}} \backslash (\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_{m-1} 0} \cup \Delta_{c_1 c_2 \ldots c_{m-1} 1})| = \frac{1}{A_m} - \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{A_n} \geq$$
$$\geq \frac{1}{A_m}\left(1 - \frac{2}{a_m+1}\right) \geq 0.$$
5. $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1 c_2 \ldots c_m} = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta'_{c_1 c_2 \ldots c_m} = x \equiv \Delta_{c_1 c_2 \ldots c_m \ldots}$;
6. $C_r = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \bigcup\limits_{\substack{c_i \in \{0,1\},\\ i=\overline{1,m}}} \Delta_{c_1 c_2 \ldots c_m}$.

Теорема 2. *Множина неповних сум ряду Люрота* C_r *є:*

1. *відрізком* $\left[-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$, *якщо* $a_n = 1 \quad \forall n \in N$;
2. *об'єднанням скінченного числа відрізків, якщо* $a_n = 1$ *для всіх* n, *більших деякого* n_0;

3. ніде не щільною досконалою множиною нульової міри Лебега, якщо $a_n \neq 1$ *для нескінченної множини значень* n.

Доведення. **1.** Якщо $a_n = 1$ для всіх $n \in N$, то $d = \frac{4}{3}$ і $b = \frac{2}{3}$. Значить, $C_r \subset \left[-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$.

Доведемо, що для будь-якого $x_0 \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$ існує послідовність (ε_k) така, що

$$x_0 = \varepsilon_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\varepsilon_n}{2^n} \equiv \Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}.$$

Очевидно, що існує ε_1 таке, що

$$-\frac{2}{3} + \varepsilon_1 \leq x_0 < \frac{1}{3} + \varepsilon_1,$$
$$-\frac{2}{3} \leq x_0 - \varepsilon_1 < \frac{1}{3}.$$

Позначимо $x_1 = x_0 - \varepsilon_1$. Якщо $x_1 = -\frac{2}{3}$, то

$$x_0 = \varepsilon_1 - \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots \equiv \Delta_{\varepsilon_1(10)}.$$

Якщо $x_1 \neq -\frac{2}{3}$, то існує ε_2 таке, що

$$-\frac{2}{3} - \frac{\varepsilon_2 - 1}{2} \leq x_1 < \frac{1}{3} - \frac{\varepsilon_2}{2},$$
$$-\frac{1}{6} \leq x_1 + \frac{\varepsilon_2}{2} < \frac{1}{3}.$$

Позначимо $x_2 = x_1 + \frac{\varepsilon_2}{2}$. Якщо $x_2 = -\frac{1}{6}$, то

$$x_0 = \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_2}{2} + \frac{0}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots \equiv \Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2(01)}.$$

Якщо $x_2 \neq -\frac{1}{6}$, то існує ε_3 таке, що

$$-\frac{1}{6} + \frac{\varepsilon_3}{2^2} \leq x_2 < \frac{1}{3} + \frac{\varepsilon_3 - 1}{2^2},$$
$$-\frac{1}{6} \leq x_2 - \frac{\varepsilon_3}{2^2} < \frac{1}{12}.$$

Позначимо $x_3 = x_2 - \frac{\varepsilon_3}{2^2}$. Якщо $x_3 = -\frac{1}{6}$, то

$$x_0 = \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_3}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \ldots \equiv \Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(10)}.$$

Отже, або існує таке натуральне число m, що

$$x_0 = \Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_m(01)}, \quad \text{якщо} \quad m = 2n,$$

$$x_0 = \Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_m(10)}, \quad \text{якщо} \quad m = 2n+1,$$

або ж такого числа m не існує. Тоді існує послідовність чисел (ε_n) таких, що

$$x_0 = \Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}.$$

Отже, $\left[-\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right] \subset C_r$.

Таким чином $C_r \subset \left[-\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right]$ і $\left[-\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right] \subset C_r$, отже, $C_r = \left[-\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right]$.

2. Якщо існує такий номер n_0, що для всіх $n > n_0$ виконуються рівності $a_n = 1$, то за 4 властивістю циліндричних відрізків маємо

$$\Delta_{c_1c_2\ldots c_{n_0}} = \Delta_{c_1c_2\ldots c_{n_0}0} \cup \Delta_{c_1c_2\ldots c_{n_0}1}.$$

У свою чергу

$$\Delta_{c_1c_2\ldots c_{n_0}0} = \Delta_{c_1c_2\ldots c_{n_0}00} \cup \Delta_{c_1c_2\ldots c_{n_0}01} \quad \text{і} \quad \Delta_{c_1c_2\ldots c_{n_0}1} = \Delta_{c_1c_2\ldots c_{n_0}10} \cup \Delta_{c_1c_2\ldots c_{n_0}11}.$$

Тоді

$$\Delta_{c_1c_2\ldots c_{n_0}} = \bigcup_{c_{n_0+1}} \bigcup_{c_{n_0+2}} \Delta_{c_1c_2\ldots c_{n_0}c_{n_0+1}c_{n_0+2}}.$$

Продовжуючи аналогічні міркування далі, отримаємо

$$\Delta_{c_1c_2\ldots c_{n_0}} = \bigcap_{m=n_0+1}^{\infty} \bigcup_{\substack{c_i\in\{0,1\},\\ i=\overline{n_0+1,m}}} \Delta_{c_1c_2\ldots c_m}.$$

Отже, за 6 властивістю циліндричних відрізків маємо

$$C_r = \bigcup_{c_1\in\{0,1\}} \bigcup_{c_2\in\{0,1\}} \ldots \bigcup_{c_{n_0}\in\{0,1\}} \Delta_{c_1c_2\ldots c_{n_0}}.$$

3. Якщо $a_n \neq 1$ для нескінченної множини значень n, то доведемо, що множина C_r є:

1) ніде не щільною;

2) досконалою;

3) множиною нульової міри Лебега.

1) Перше твердження випливає з попередньої леми, а саме: властивостей циліндричних відрізків 3, 4 та 6.

2) Доведемо досконалість множини C_r. Якщо x — гранична точка множини неповних сум C_r, то для довільного k знайдеться циліндричний відрізок $\Delta_{c_1c_2\ldots c_k}$, який містить x, оскільки в протилежному випадку точка x належала б одному із суміжних циліндричних інтервалів і існувало б $\alpha > 0$ таке, що

$$(x-\alpha; x+\alpha) \bigcap C_r = \varnothing.$$

А це суперечить тому, що x — гранична точка множини C_r. Переріз $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_{c_1c_2\ldots c_k}$ містить єдину точку, яка належить C_r і співпадає з x. Отже, C_r — замкнена множина.

Припустимо, що C_r містить ізольовані точки, $x = \Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_k\ldots}$ — одна з них. Тоді, за означенням ізольованої точки, існує $\alpha > 0$ таке, що

$$(x-\alpha; x+\alpha)\bigcap[C_r \setminus \{x\}] = \varnothing. \tag{5}$$

Виберемо k таким великим, щоб $|\Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_k}| < \alpha$. Тоді

$$\Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_k} \subset (x-\alpha; x+\alpha), \qquad x \neq x' = \Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_k(1-\varepsilon_{k+1})\varepsilon_{k+2}\varepsilon_{k+3}\ldots} \in (x-\alpha; x+\alpha),$$

що суперечить (5). Отже, C_r — замкнена множина, яка не має ізольованих точок, тобто є досконалою згідно з означенням.

3) Нехай (a_{n_k}) — підпослідовність послідовності (a_n), причому $a_{n_k} \neq 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Тоді у послідовності (a_n) до n-го елемента кількість не одиниць рівна $k-1$, а кількість одиниць рівна $n_k - k + 1$.

Оскільки, $a_n \neq 1$ для нескінченної множини значень n, то $n_k \to \infty$ і $k \to \infty$.

З леми 4 (власт. 6) випливає, що міра Лебега множини C_r

$$\lambda(C_r) = \lim_{m\to\infty} 2^m |\Delta_{c_1c_2\ldots c_m}| = \lim_{k\to\infty} 2^{m_k} |\Delta_{c_1c_2\ldots c_{m_k}}| \leq$$
$$\leq \lim_{k\to\infty} \frac{2^{m_k}}{2^{m_k-k+1}3^{k-1}2^{k-1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3^{k-1}} = 0$$

Отже, $\lambda(C_r) = 0$.

□

5. Випадкова неповна сума заданого знакозмінного ряду Люрота з незалежними доданками

Розглянемо випадкову величину

$$X = \frac{\tau_1}{a_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\tau_k}{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)\cdot\ldots\cdot a_{k-1}(a_{k-1}+1)a_k},$$

де $\{\tau_k\}$ — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0 і 1 з ймовірностями p_{0k}, p_{1k} відповідно, причому $p_{0k} + p_{1k} = 1$. Згідно з теоремою Джессена-Вінтнера випадкова величина X має чисто дискретний, чисто сингулярний або чисто абсолютно неперервний (відносно міри Лебега) розподіл.

Теорема 3. *Для того, щоб випадкова величина X мала дискретний розподіл, необхідно і достатньо, щоб $P_{max} = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0$.*

Наслідок 1. *Для того, щоб випадкова величина X мала неперервний розподіл, необхідно і достатньо, щоб $P_{max} = 0$.*

Означення 6. *Спектром S_X розподілу випадкової величини X* називається множина всіх точок росту її функції розподілу, тобто мінімальна замкнена множина, на якій зосереджений розподіл X:

$$S_X = \{x : F_X(x+\varepsilon) - F_X(x-\varepsilon) > 0 \ \ \forall \varepsilon > 0\} =$$
$$= \{x : \mathbb{P}\{X \in (x-\varepsilon; x+\varepsilon)\} > 0 \ \ \forall \varepsilon > 0\}.$$

Якщо $p_{ik} > 0$ для всіх $i \in \{0,1\}$ і $k \in N$, то спектр S_X співпадає з множиною всіх неповних сум знакозмінного ряду Люрота.

В загальному випадку має місце наступне твердження.

Лема 5. *Спектром розподілу випадкової величини X є множина*

$$E = \{x : x = \triangle_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k \ldots}, \quad p_{\varepsilon_k k} > 0 \ \ \forall k \in N\}.$$

Доведення. 1. Покажемо, що $E \subset S_X$. Нехай $\triangle_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k \ldots} = x \in E$. Тоді

$$\mathbb{P}\{X \in \triangle_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k}\} = \prod_{i=1}^{k} p_{\varepsilon_i i} > 0 \ \ \forall k \in N.$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ існує k таке, що

$$\triangle_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k} \subset (x-\varepsilon; x+\varepsilon).$$

Тому

$$\mathbb{P}\{X \in (x-\varepsilon; x+\varepsilon) \geq \mathbb{P}\{X \in \triangle_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k}\} > 0,$$

тобто $x \in S_X$ і $E \subset S_X$.

2. Покажемо тепер, що $S_X \subset E$. Нехай $x \in S_X$, тобто

$$\mathbb{P}\{X \in (x-\varepsilon; x+\varepsilon)\} > 0 \ \ \forall \varepsilon > 0. \tag{6}$$

Припустимо, що існує k таке, що $p_{\varepsilon_k k} = 0$. Тоді

$$\mathbb{P}\{X \in \triangle_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k}\} = \prod_{i=1}^{k} p_{\varepsilon_i i} = 0.$$

Розглянемо довільне x таке, що $x = \triangle_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k \ldots}$. Можливі випадки:

1) існує $\varepsilon > 0$ таке, що $(x-\varepsilon; x+\varepsilon) \subset \triangle_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k}$;

2) $(x-\varepsilon; x+\varepsilon) \not\subset \triangle_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k}$ для довільного $\varepsilon > 0$.

У першому випадку $\mathbb{P}\{X \in (x-\varepsilon; x+\varepsilon)\} \leq \mathbb{P}\{X \in \triangle_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k}\} = 0$, що суперечить (6). У другому випадку x є односторонньо граничною точкою множини C_r. Для конкретності, нехай лівосторонньою. Тоді існує таке $\varepsilon > 0$, що

$$(x-\varepsilon; x) \subset \triangle_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k}, \quad \mathbb{P}\{X \in \triangle_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k}\} = 0.$$

І в цьому випадку $\mathbb{P}\{X \in (x-\varepsilon; x+\varepsilon)\} = \mathbb{P}\{X \in \triangle_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k}\} = 0$, що суперечить умові (6). Отримане протиріччя доводить, що $p_{\varepsilon_k k} > 0$ для довільного $k \in N$, тобто $x \in E$. Отже, $S_X = E$, що й вимагалось довести. □

Теорема 4. *Якщо $P_{max} = 0$ і $a_n \neq 1$ для нескінченної множини значень n, то розподіл X є сингулярним розподілом канторівського типу.*

Доведення. При $P_{max} = 0$ розподіл, згідно з наслідком з теореми 3, є неперервним. Оскільки міра Лебега $\lambda(C_r) = 0$, якщо $a_n \neq 1$ для нескінченної множини значень n то і $\lambda(S_X) = 0$. Отже, X має сингулярний розподіл канторівського типу, що й вимагалось довести. □

Функція розподілу F_X випадкової величини X досить визначити в точках спектра розподілу S_X, оскільки в інших точках вона довизначається за неперервністю та монотонністю.

Лема 6. *В точці $\triangle_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k \ldots} = x \in S_X$ функція розподілу F_X випадкової величини X виражається*

$$F_X(x) = \beta_{\varepsilon_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\varepsilon_k k} \prod_{j=1}^{k-1} P_{\varepsilon_j j} \right], \tag{7}$$

де $$\beta_{\varepsilon_k k} = \begin{cases} \varepsilon_k p_{0k}, & \textit{при непарному} \quad k, \\ (1-\varepsilon_k) p_{1k}, & \textit{при парному} \quad k. \end{cases}$$

Доведення. Подія $\{X < x\}$ має вираз

$$\{X < x\} = \{\tau_1 < \varepsilon_1\} \bigcup \{\tau_1 = \varepsilon_1, \tau_2 > \varepsilon_2\} \bigcup \{\tau_1 = \varepsilon_1, \tau_2 = \varepsilon_2, \tau_3 < \varepsilon_3\} \bigcup \ldots$$
$$\bigcup \{\tau_1 = \varepsilon_1, \tau_2 = \varepsilon_2, \ldots, \tau_{k-1} = \varepsilon_{k-1}, \tau_k \vee \varepsilon_k\} \bigcup \ldots,$$

де знак $\vee$ має такий зміст:

$$\vee = \begin{cases} >, & \text{якщо} \quad k = 2n, \ n \in N, \\ <, & \text{якщо} \quad k = 2n-1, \ n \in N. \end{cases}$$

Тоді

$$\mathbb{P}\{X < x\} = \mathbb{P}\{\tau_1 < \varepsilon_1\} + \mathbb{P}\{\tau_1 = \varepsilon_1, \tau_2 > \varepsilon_2\} + \mathbb{P}\{\tau_1 = \varepsilon_1, \tau_2 = \varepsilon_2, \tau_3 < \varepsilon_3\} + \ldots +$$
$$+ \mathbb{P}\{\tau_1 = \varepsilon_1, \tau_2 = \varepsilon_2, \ldots, \tau_{k-1} = \varepsilon_{k-1}, \tau_k \vee \varepsilon_k\} + \ldots .$$

Оскільки події $\tau_i = \varepsilon_i, \tau_j = \varepsilon_j$ і $\tau_k \vee \varepsilon_k$ є незалежними, то

$$\mathbb{P}\{\tau_1 = \varepsilon_1, \tau_2 = \varepsilon_2, \ldots, \tau_{k-1} = \varepsilon_{k-1}, \tau_k \vee \varepsilon_k\} = \left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}\{\tau_i = \varepsilon_i\} \right) \cdot \mathbb{P}\{\tau_k \vee \varepsilon_k\} =$$
$$= \beta_{\varepsilon_k k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{\varepsilon_j j}.$$

Отже, функція розподілу $F_X(x) = \mathbb{P}\{X < x\}$ виражається у формі (7). Лему доведено. $\square$

Теорема 5. *Функція розподілу F_X випадкової величини X виражається*

$$F_X(x) = F_X(\overline{x}),$$

де $\overline{x} = \sup\{u : \ u < x, \ u \in S_X\}$.

Теорема 5 випливає з леми 6 і означення функції розподілу.

Література

[1] *Albeverio S., Baranovskyi O., Pratsiovytyi M., Torbin G.* The set of incomplete sums of the first Ostrogradsky series and probability distributions on it. // Rev. Roum. Math. Pures Appl. — 2009. — **54**, no. 2. — P. 85-115.

[2] *Barrionuevo J., Burton R., Dajani K., Kraaikamp C. Ergodic properties of generalized Lüroth series* // Acta Arithmetica (1996) – №4 – P. 311–327.

[3] *Cantor G.* Uber die einfachen Zahlensysteme // Z.Math.Phys. — 1969. — Bd. 14. — S.121-128.

[4] *Luroth J.* Ueber eine eindeutige Entwickelung von Zahlen in eine unendliche Reihe // Math. Ann. — 1883. — Vol. 21. — P. 411-423.

[5] *Kalpazidou S., Knopfmacher A., Knopfmacher J.* Lüroth-type alternating series representations for real numbers // Acta Arith. — 1990. — Vol. 55. — P. 311–322.

[6] *Dajani K., Kraaikamp C.* On approximation by Luroth series. // J.Theor. Nomberes Bordeaux — 1996. —**8**.— P. 331-346

[7] *Galambos J.* Some remarks on the Lüroth expansion // Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 22 (1972) – № 2 – P. 266–271.

[8] *Galambos J.* On some Properties of the Luroth-tipe alternating series representations fer real numbers. // Int. J. Math. Math. —2001.—Sci. 28, No.6.— P. 367-373

[9] *Sierpinski W.* O kilku algorytmach dla rozwijania liczb rzeczywistych na szeregi // C.R.Soc.Sci.Varsivie.— (4) 1911— P. 56–77.

[10] *Sylvester J. J.* On a point in the theory of vulgar fractions // Amer. Journal of Math.— (3)1880. — P. 332–335.,postscript ibid. 388–389.

[11] *Барановський О.М., Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Тополого-метричні властивості множин дійсних чисел з умовами на їх розклади в ряди Остроградського // Укр. Мат. журн. — 2007. — 59, № 9. — С. 1155-1168.

[12] *Працьовита І. М.* Ряди Остроградського 2-го виду і розподіли їх випадкових неповних сум // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ імені М.П.Драгоманова. — 2006. — № 7. — С. 174–189.

[13] *Працьовита І. М.* Про розклади чисел в знакозмінні s-адичні ряди і ряди Остроградського 1-го та 2-го виду // Укр. Мат. журн., 2009. — 61, № 7. — С.958-968.

[14] *Працьовитий М. В., Гетьман Б. І.* Ряди Енгеля та їх застосування // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ імені М.П.Драгоманова. — 2006. — № 7. — С. 105–116.

[15] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.