

УДК 510.22 + 517.5

Тополого-метричні та фрактальні властивості множин неповних сум (підсум) одного класу збіжних рядів з суттєвими перекриттями

І. О. Савченко

(Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова)

АНОТАЦІЯ. Робота присвячена дослідженню тополого-метричних і фрактальних властивостей множин неповних сум (підсум) одного класу збіжних знакододатних рядів з суттєвими перекриттями циліндричних множин, а саме рядів, для яких виконуються наступні співвідношення між членами та залишками ряду: $a_n > r_n$ і $a_n < r_n$ нескінченну кількість разів. Обчислено міру Лебега та розмірність Хаусдорфа–Безиковича відповідних множин неповних сум.

Ключові слова: множина неповних сум (підсум) ряду, фрактал, міра Лебега, розмірність Хаусдорфа–Безиковича.

АБСТРАКТ. The paper highlights one class of convergent positive series with the essential overlaps of cylindrical sets, namely the series such that $a_n > r_n$ and $a_n < r_n$ infinity many, where a_n is a term and r_n is a remainder of the series. We study topological, metric, and fractal properties of the sets of incomplete sums (subsums) of such series. Lebesgue measure and Hausdorff-Besicovitch dimension of these incomplete sums are calculated.

Keywords: set of incomplete sums (subsums) of a series, a fractal, Lebesgue measure, Hausdorff-Besicovitch dimension.

ВСТУП

Розглядається збіжний знакододатний ряд

$$r_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + r_n. \quad (1)$$

Нехай M — довільна підмножина множини натуральних чисел \mathbb{N} . Число

$$x(M) = \sum_{n \in M \subset \mathbb{N}} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon_n, \quad \text{де } \varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n \in M, \\ 0, & \text{якщо } n \notin M, \end{cases}$$

називається *неповною сумою (підсумою)* ряду (1).

Множину всіх неповних сум ряду (1) позначатимемо через $E\{a_n\}$, тобто

$$E\{a_n\} \equiv \left\{ x : x = \sum_{n \in M} a_n, \quad M \in 2^{\mathbb{N}} \right\}.$$

Вивченням тополого-метричних властивостей множини $E\{a_n\}$ науковці займаються майже століття (див. наприклад [5], [6], [8], [9], [13], [17], [4], [27]). І в цьому відношенні здобуто ряд загальних результатів, але опис її властивостей далекий до повного. Ще менш дослідженими є фрактальні властивості множини $E\{a_n\}$, хоча для деяких класів рядів це успішно зроблено (див. наприклад [1], [14], [20], [4], [6], [27]). На сьогодні все ще невідомі необхідні і достатні умови нуль-мірності (у розумінні міри Лебега), а також ніде не щільності множини неповних сум ряду (1).

В останній час акцентовано ведуться дослідження властивостей множини неповних сум (див. наприклад [2], [7], [12], [16], [18], [21], [20], [22]). В основному це дослідження окремих випадків, коли члени ряду утворюють послідовність, яка володіє деякою властивістю однорідності по n .

Тополого-метричні властивості множин неповних сум рядів суттєво залежать від їх “швидкості збіжності”. Наступні три факти про множину $E\{a_n\}$ неповних сум ряду (1), у якого $a_n \geq a_{n+1}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ встановили С. Какея [8] в 1914 році (і незалежно Г. Горнич [6] в 1941 р.).

Теорема 1 (Какея-Горнич). *Множина $E\{a_n\}$ підсум ряду (1) є*

- 1) *досконалою множиною;*
- 2) *скінченим об'єднанням відрізків тоді й лише тоді, коли $a_n \leq r_n$ для всіх n , починаючи з деякого номеру ($E\{a_n\}$ – відрізок тоді й лише тоді, коли $a_n \leq r_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$);*
- 3) *гомеоморфною класичній множині Кантора, якщо $a_n > r_n$ для всіх достатньо великих n .*

Зауваження 1. *Наведене твердження не можна застосувати до дослідження топологічних властивостей множин підсум рядів, у яких послідовність членів (a_n) не є монотонною (нерівність $a_n \geq a_{n+1}$ не виконується для всіх $n \in \mathbb{N}$). Наступні два приклади це підтверджують.*

Приклад 1. Для ряду

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{2}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^k} + \frac{2}{4^k} + \dots$$

нерівність $a_n > r_n$ виконується для всіх парних номерів n . А множина підсум даного ряду є відрізком $[0, 1]$, оскільки кожне число x , що є підсумою даного ряду, можна

подати у вигляді четвіркового ряду:

$$x = \frac{\alpha_1}{4} + \frac{\alpha_2}{4^2} + \dots + \frac{\alpha_k}{4^k} + \dots, \quad \alpha_k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Приклад 2. Для ряду

$$\frac{1}{2!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{k!} + \dots$$

нерівність $a_n > r_n$ виконується для всіх парних номерів, а нерівність $a_n < r_n$ — для всіх непарних. І тому теорема 1 (без врахування умови монотонності членів ряду) не дає достатньої інформації про множину підсум даного ряду. Проте, після упорядкування членів ряду, нерівність $a_n > r_n$ виконуватиметься для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тому множина його підсум є ніде не щільною.

У тій же роботі [8] С. Какея висунув припущення, що при виконанні умови $a_n > r_n$ для нескінченної кількості n , множина $E\{a_n\}$ буде ніде не щільною (а, отже, гомеоморфною множині Кантора). Перший контрприклад навели в 1980 р. (без доведення) А.Д. Вайнштейн і Б.З. Шапіро [17]. Незалежно, Ф. Ференс [4] навів у 1984 р. інший приклад (з доведенням). Більш простий приклад представили Дж. Гатрі і Дж. Німан [5]:

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{2}{4^3} + \dots \quad (2)$$

Для цього ряду, як і у прикладах із вище наведених робіт, нерівності $a_n > r_n$ і $a_n < r_n$ виконуються нескінченну кількість разів, а множина T неповних сум ряду (2) містить відрізок $[\frac{3}{4}, 1]$, але не є скінченним об'єднанням відрізків. Множину T можна означити наступним чином

$$T \equiv C \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{2n-1} = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{2n},$$

де C — класична множина Кантора, G_k — об'єднання всіх центральних третин, які видаляються з множини C на k -му кроці її побудови. В цій же роботі [5], автори сформулювали теорему, яку було остаточно доведено в [10]. Наведемо її.

Теорема 2 (Guthrie-Nyman-Sáenz). *Множина $E\{a_n\}$ неповних сум збіжного знакододатного ряду (1) є однією з наступних:*

- 1) скінченним об'єднанням відрізків;
- 2) гомеоморфною множині Кантора;
- 3) гомеоморфною множині T неповних сум ряду (2).

Ми цікавимося *тополого-метричними та фрактальними властивостями* множин неповних сум знакододатних рядів, для яких нерівності $a_n > r_n$ і $a_n < r_n$ виконуються для нескінченних множин індексів n . Даний випадок є найбільш загадковим і мало вивченим. Множина підсум ряду, що володіє такою властивістю, може бути

як нуль-множиною Лебега, так і множиною додатньої міри (ніде не щільною множиною або множиною, що містить нескінченну кількість відрізків). Про це свідчать приклади ряду (2) і ряду

$$\frac{5}{4} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4^2} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \frac{3}{4^3} + \dots \quad (3)$$

Множина неповних сум ряду (3) є ніде не щільною нуль-множиною Лебега, розмірність Хаусдорфа-Безиковича якої дорівнює

$$\log_4(2 + \sqrt{2}) \approx 0,8858.$$

Наведений результат є наслідком теореми 4.

Об'єктом даної роботи є множина E_λ неповних сум ряду

$$a_1 + a_2 + a_1\lambda + a_2\lambda + a_1\lambda^2 + a_2\lambda^2 + \dots = \frac{a_1 + a_2}{1 - \lambda}, \quad (4)$$

де a_1, a_2, λ — дійсні числа, $a_1 > a_2, \lambda \in (0, 1)$.

Зауваження 2. Згрупувавши попарно члени ряду (4) і врахувавши, що коефіцієнти $\varepsilon_{2n-1}a_1 + \varepsilon_{2n}a_2$ при членах λ^{n-1} можуть набувати чотири значення, множину неповних сум ряду (4) запишемо у вигляді

$$E_\lambda = \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \lambda^{n-1}, \quad \eta_n \in \{0, a_1, a_2, a_1 + a_2\} \right\}.$$

Множина E_λ досліджувалась у роботі [14], у якій стверджується, що для майже всіх значень $\lambda > \frac{1}{4}$ вона матиме додатню міру Лебега (див. також теорему 2.1 роботи [15]). Також було встановлено існування такої щільної нуль-множини M_0 значень $\lambda > \frac{1}{4}$, що при кожному з них множина E_λ має нульову міру Лебега. Але явно вказати ці значення не вдалося.

Зауваження 3. Множина E_λ неповних сум ряду (4) є векторною (арифметичною) сумою $E\{a_1q^{n-1}\} \oplus E\{a_2q^{n-1}\}$ множин неповних сум рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_1q^{n-1}$ та $\sum_{n=1}^{\infty} a_2q^{n-1}$, тобто

$$E_q = E\{a_1q^{n-1}\} \oplus E\{a_2q^{n-1}\} = \{x : x = a + b, \text{ де } a \in E\{a_1q^{n-1}\}, b \in E\{a_2q^{n-1}\}\}.$$

З теореми 1.1. роботи [11] випливає, що для майже всіх (відносно міри Лебега) значень $q \in (\frac{1}{4}, 1)$, арифметична сума двох множин підсум геометричних рядів з членами a_1q^{n-1} та a_2q^{n-1} є множиною додатньої міри.

Із зроблених вище зауважень і деяких стандартних міркувань (таких, як в теоремі 2 роботи [24]) випливає наступне твердження.

Теорема 3. Множина E_λ неповних сум ряду (4) є

- 1) ніде не щільною нуль-множиною Лебега, якщо $\lambda \in (0; \frac{1}{4})$;
 - 2) відрізком $[0, \frac{a_1+a_2}{1-\lambda}]$, якщо $\lambda \in [\max\{\frac{a_1-a_2}{2a_1}, \frac{a_2}{a_1+2a_2}\}; 1)$;
 - 3) множиною додатньої міри Лебега для майже всіх $\lambda \in (\frac{1}{4}; \max\{\frac{a_1-a_2}{2a_1}, \frac{a_2}{a_1+2a_2}\})$.
- Розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини E_λ дорівнює

$$\alpha_0(E_\lambda) = -\log_\lambda 4$$

для майже всіх (у розумінні міри Лебега) значень $\lambda \in (0, \frac{1}{4})$ (для всіх $\lambda \in (0; \min\{\frac{a_1-a_2}{2a_1}, \frac{a_2}{a_1+2a_2}\})$).

Отже, залишається мало дослідженим проміжок значень

$$\lambda \in \left[\min \left\{ \frac{a_1 - a_2}{2a_1}, \frac{a_2}{a_1 + 2a_2} \right\}; \max \left\{ \frac{a_1 - a_2}{2a_1}, \frac{a_2}{a_1 + 2a_2} \right\} \right) \equiv \widetilde{M},$$

при яких множина E_λ має складну геометрію. З однієї сторони, для майже всіх $\lambda \in \widetilde{M}$ множина E_λ має додатню міру Лебега, а з іншої сторони, існує така підмножина $M_0 \subset \widetilde{M}$, що для всіх $\lambda \in M_0$ множина E_λ має нульову міру Лебега. Основні труднощі при дослідженні даної множини пов'язані з тим, що існує континуальна підмножина точок $x \in E_\lambda$, які мають континуальну кількість різних представлень у вигляді сум $x = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n a_n$, де $\omega_n \in \{0, 1\}$.

Основною задачею даної роботи є дослідження фрактальних властивостей множини підсум ряду (4) при $\lambda = \frac{a_1-a_2}{a_1+a_2} \equiv q \in \widetilde{M}$, тобто ряду

$$a_1 + a_2 + a_1q + a_2q + a_1q^2 + a_2q^2 + \dots = \frac{(a_1 + a_2)^2}{2a_2}. \quad (5)$$

Дану множину неповних сум позначатимемо через E_q .

Легко бачити, що для членів ряду (5) виконується умова однорідності (по n):

$$a_{2n-1} = a_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (6)$$

з якої випливає нерівність $a_{2n-1} < r_{2n-1}$ при всіх $n \in \mathbb{N}$. При певних співвідношеннях чисел a_1 і a_2 , для всіх $n \in \mathbb{N}$, має місце одна з двох нерівностей $a_{2n-1} > r_{2n-1}$ або $a_{2n-1} \leq r_{2n-1}$.

Теорема 2 дає повний опис тополого-метричних і фрактальних властивостей множини E_λ при конкретному фіксованому значенні $\lambda = \frac{a_1-a_2}{a_1+a_2}$, яке може бути більшим за $\frac{1}{4}$. Основний акцент зроблено на вивченні її фрактальних властивостей, чого не було зроблено у вище наведених роботах.

1. МНОЖИНА НЕПОВНИХ СУМ РЯДУ

З метою вивчення властивостей множини E_q неповних сум ряду (5), корисними є поняття *циліндра* та *циліндричного відрізка*.

Означення 1. Нехай (c_1, c_2, \dots, c_m) – фіксований впорядкований набір нулів та одиниць. *Циліндром рангу m з основою $c_1c_2\dots c_m$ ($c_i \in \{0, 1\}$)* називається множина $\Delta'_{c_1\dots c_m}$, яка містить всі неповні суми ряду (1) виду

$$\sum_{n=1}^m c_n a_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} \varepsilon_n a_n, \quad \text{де } \varepsilon_n \in \{0, 1\}.$$

Циліндричним відрізком рангу m з основою $c_1c_2\dots c_m$ називається відрізок

$$\Delta_{c_1\dots c_m} = [\inf \Delta'_{c_1\dots c_m}, \sup \Delta'_{c_1\dots c_m}] = \left[\sum_{n=1}^m c_n a_n, r_m + \sum_{n=1}^m c_n a_n \right].$$

З означень випливають наступні *властивості циліндричних множин*:

- 1) $\Delta'_{c_1\dots c_m} \subset \Delta_{c_1\dots c_m}$, $\inf \Delta_{c_1\dots c_m} = \inf \Delta'_{c_1\dots c_m}$, $\sup \Delta_{c_1\dots c_m} = \sup \Delta'_{c_1\dots c_m}$.
- 2) $\Delta'_{c_1\dots c_m} = \Delta'_{c_1\dots c_m 0} \cup \Delta'_{c_1\dots c_m 1}$.
- 3) Діаметр циліндра не залежить від його основи, а лише від рангу:

$$|\Delta'_{c_1\dots c_m}| = r_m \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty).$$

- 4) Для довільної послідовності (c_m) нулів та одиниць має місце

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1\dots c_m} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta'_{c_1\dots c_m} \equiv \Delta_{c_1\dots c_m\dots} = \sum_{m=1}^{\infty} c_m a_m = x \in E\{a_n\} \subset [0, r_0].$$

- 5) $E\{a_n\} \subset F_{m+1} \subset F_m$ для всіх $m \in \mathbb{N}$, де $F_m = \bigcup_{c_i \in \{0,1\}, i=\overline{1,m}} \Delta_{c_1\dots c_m}$.

$$6) E\{a_n\} = \lim_{m \rightarrow \infty} F_m = \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m.$$

- 7) Умова

$$\Delta_{c_1\dots c_{2n-2}0} \cap \Delta_{c_1\dots c_{2n-2}1} = \Delta_{c_1\dots c_{2n-2}0111} = \Delta_{c_1\dots c_{2n-2}1000}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (7)$$

рівносильна рівності

$$a_{2n-1} = a_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Доведення. Рівність (7) рівносильна рівності довжин

$$|\Delta_{c_1\dots c_{2n-2}0} \cap \Delta_{c_1\dots c_{2n-2}1}| = |\Delta_{c_1\dots c_{2n-2}0111}|,$$

яка, згідно властивостей 3 і 6 циліндричних множин, записується у вигляді

$$r_{2n-1} - a_{2n-1} = r_{2n+2},$$

звідки

$$r_{2n-1} - r_{2n+2} = a_{2n-1} \Leftrightarrow a_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} = a_{2n-1}.$$

□

Нагадаємо означення α -міри Хаусдорфа і розмірності Хаусдорфа-Безиковича множини $E \subset \mathbb{R}^1$, які більш тонко характеризують “масивність” множин у випадку їх нуль-мірності (у розумінні міри Лебега).

Означення 2. Нехай $0 < \alpha$ — фіксоване дійсне число, α -мірною мірою (α -мірою) Хаусдорфа множини M називається значення функції множини, визначеної рівністю

$$\mathcal{H}^\alpha(M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m_\varepsilon^\alpha(M) = \sup_{\varepsilon > 0} m_\varepsilon^\alpha(M), \quad \text{де } m_\varepsilon^\alpha(M) = \inf_{|M_j| \leq \varepsilon} \left\{ \sum_j |M_j|^\alpha \right\}$$

і точна нижня грань визначається за всіма можливими не більш ніж зчисленними покриттями множини M відрізками M_i , діаметри $|M_i|$ яких не перевищують ε .

Невід’ємне число

$$\alpha_0(M) = \sup \{ \alpha : \mathcal{H}^\alpha(M) = +\infty \} = \inf \{ \alpha : \mathcal{H}^\alpha(M) = 0 \}$$

називається розмірністю Хаусдорфа-Безиковича множини M .

Розмірність Хаусдорфа-Безиковича має наступні властивості:

- 1) Якщо $M_1 \subset M_2$, то $\alpha_0(M_1) \leq \alpha_0(M_2)$;
- 2) $\alpha_0\left(\bigcup_i M_i\right) = \sup_i \alpha_0(M_i)$.

Теорема 4. Множина E_q неповних сум ряду (5) є

1) відрізком $[0, \frac{(a_1+a_2)^2}{2a_2}]$, якщо $\frac{a_2}{a_1} \in (0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$;

2) ніде не щільною нуль-множиною Лебега, розмірність Хаусдорфа-Безиковича якої дорівнює

$$\alpha_0(E_q) = \log_{\frac{a_1+a_2}{a_1-a_2}}(2 + \sqrt{2}),$$

якщо $\frac{a_2}{a_1} \in (\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$.

Доведення. 1) Очевидно, що $a_{2n-1} = a_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} < r_{2n-1}$ для всіх номерів n . Нерівність $a_{2n} \leq r_{2n}$ рівносильна нерівності $a_2 \leq \frac{a_1^2 - a_2^2}{2a_2}$, яка має місце при $\frac{a_2}{a_1} \in (0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$.

Отже, для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $a_n \leq r_n$, яка у випадку незростаючої послідовності (a_n) є необхідною і достатньою для того, щоб множина E_q була відрізком.

Зазначимо, що у випадку немонотонної послідовності (a_n) членів ряду (1), умова $a_n \leq r_n, \forall n \in \mathbb{N}$, є достатньою для того, щоб множина його неповних сум була відрізком, але, взагалі кажучи, не є необхідною.

2) Оскільки $a_{2n-1} > a_{2n}$ для всіх n , то послідовність (a_n) членів ряду (5) не є монотонною лише у випадку, коли $a_{2n} < a_{2n+1} \Leftrightarrow a_2 < \frac{a_1(a_1-a_2)}{a_1+a_2}$, що можливо при $\frac{a_2}{a_1} \in (0, \sqrt{2}-1) \subset (0, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Якщо ж $\frac{a_2}{a_1} \in (\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$, то послідовність членів ряду (5) є спадною і тому для всіх $n \in \mathbb{N}$ справедливими є нерівності:

$$a_{2n} > r_{2n}, \quad \min \Delta_{c_1 \dots c_{2n-2}01} < \min \Delta_{c_1 \dots c_{2n-2}1}, \quad \max \Delta_{c_1 \dots c_{2n-2}10} > \max \Delta_{c_1 \dots c_{2n-2}0},$$

з яких, враховуючи (7), випливає:

$$\begin{aligned} \Delta_{c_1 \dots c_{2n-1}0} \cap \Delta_{c_1 \dots c_{2n-1}1} &= \emptyset, \\ E_q \cap (\max \Delta_{c_1 \dots c_{2n-2}00}; \min \Delta_{c_1 \dots c_{2n-2}01}) &= \emptyset, \\ E_q \cap (\max \Delta_{c_1 \dots c_{2n-2}10}; \min \Delta_{c_1 \dots c_{2n-2}11}) &= \emptyset. \end{aligned}$$

Таким чином, інтервали виду $\delta_{c_1 \dots c_{2n-1}i_{2n}} \equiv (\max \Delta_{c_1 \dots c_{2n-1}0}; \min \Delta_{c_1 \dots c_{2n-1}1})$ не містять точок даної множини. Кількість таких *суміжних з множиною E_q інтервалів рангу $2n$* нас цікавитиме. Легко бачити, що

$$|\delta_{c_1 \dots c_{2n-1}i_{2n}}| = a_{2n} - r_{2n} \equiv d_{2n} = \frac{3a_2^2 - a_1^2}{2a_2} \cdot \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

З метою дослідження властивостей даної множини, розглядатимемо циліндричні множини рангу $2n$ і виділимо їх два типи.

1) $\square'_{c_1 \dots c_{2n-2}ab} \equiv \Delta'_{c_1 \dots c_{2n-2}01} \cup \Delta'_{c_1 \dots c_{2n-2}10}$ — множина, яка є об'єднанням двох циліндрів, які між собою перетинаються. Відповідний множині $\square'_{c_1 \dots c_{2n-2}ab}$ циліндричний відрізок позначатимемо через $\square_{c_1 \dots c_{2n-2}ab} \equiv [\min \Delta_{c_1 \dots c_{2n-2}01}, \max \Delta_{c_1 \dots c_{2n-2}10}]$.

2) $\Delta'_{c_1 \dots c_{2n-2}cc}$ — циліндр, геометрично подібний всій множині E_q , $c \in \{0, 1\}$.

Множина $\Delta'_{c_1 \dots c_{2n-2}cc}$ є об'єднанням *двох* множин $\Delta'_{c_1 \dots c_{2n-2}ccjj}$, де $j \in \{0, 1\}$, і *однієї* множини $\square'_{c_1 \dots c_{2n-2}ccab}$:

$$\Delta'_{c_1 \dots c_{2n-2}cc} = \Delta'_{c_1 \dots c_{2n-2}cc00} \cup \square'_{c_1 \dots c_{2n-2}ccab} \cup \Delta'_{c_1 \dots c_{2n-2}cc11}, \quad (8)$$

а множина $\square'_{c_1 \dots c_{2n-2}ab}$ є об'єднанням *трьох* множин $\Delta'_{c_1 \dots c_{2n}cc}$ і *двох* множин $\square'_{c_1 \dots c_{2n}ab}$ наступного парного рангу:

$$\square'_{c_1 \dots c_{2n-2}ab} = \Delta'_{c_1 \dots c_{2n-2}0100} \cup \square'_{c_1 \dots c_{2n-2}01ab} \cup \Delta'_{c_1 \dots c_{2n-2}0\bar{c}cc} \cup \square'_{c_1 \dots c_{2n-2}10ab} \cup \Delta'_{c_1 \dots c_{2n-2}1011}. \quad (9)$$

Множина $\square'_{c_1 \dots c_{2n-2}ab}$ має *чотири* суміжні інтервали виду:

$$\begin{aligned} &(\max \Delta_{c_1 \dots c_{2n-2}0100}, \min \Delta_{c_1 \dots c_{2n-2}0101}), \quad (\max \Delta_{c_1 \dots c_{2n-2}0110}, \min \Delta_{c_1 \dots c_{2n-2}0111}), \\ &(\max \Delta_{c_1 \dots c_{2n-2}0111}, \min \Delta_{c_1 \dots c_{2n-2}1001}), \quad (\max \Delta_{c_1 \dots c_{2n-2}1010}, \min \Delta_{c_1 \dots c_{2n-2}1011}), \end{aligned}$$

а множина $\Delta'_{c_1 \dots c_{2n-2}cc}$ має *два* суміжні інтервали виду:

$$(\max \Delta_{c_1 \dots c_{2n-2}cc00}, \min \Delta_{c_1 \dots c_{2n-2}cc01}) \quad \text{та} \quad (\max \Delta_{c_1 \dots c_{2n-2}cc10}, \min \Delta_{c_1 \dots c_{2n-2}cc11})$$

рангу $2n + 2$.

Нехай x_n — кількість всіх циліндричних множин виду $\square'_{c_1 \dots c_{2n-2} ab}$, y_n — кількість всіх множин виду $\Delta'_{c_1 \dots c_{2n-2} cc}$, а z_n — кількість всіх суміжних з множиною E_q інтервалів рангу $2n$.

З рівностей (8) та (9) випливає, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ мають місце рівності

$$x_{n+1} = 2x_n + 3y_n, \quad (10)$$

$$y_{n+1} = x_n + 2y_n \quad (11)$$

Оскільки множина $\Delta'_{c_1 \dots c_{2n-4} cc}$ має два суміжні інтервали рангу $2n$, а множина $\square'_{c_1 \dots c_{2n-4} ab}$ — чотири, то

$$z_n = 2x_{n-1} + 4y_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (12)$$

Оскільки циліндр другого рангу геометрично подібний множині E_q , то $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$. Результати занесемо у таблицю.

Крок n / кількість	x_n	y_n	z_n
0	1	0	0
1	2	1	2
2	7	4	8
3	26	15	30
...
n	$2x_{n-1} + 3y_{n-1}$	$x_{n-1} + 2y_{n-1}$	$2x_{n-1} + 4y_{n-1}$

Відшукаємо рекурентні співвідношення, якими пов'язані члени послідовностей (x_n) , (y_n) , (z_n) . З рівностей (10), (11) отримаємо $x_{n+1} = y_{n+1} + x_n + y_n$, що рівносильно

$$x_{n+1} - x_n = y_{n+1} + y_n. \quad (13)$$

Перетворивши рівність (10), врахувавши (11), отримаємо

$$x_{n+1} = 2x_n + 2y_n + y_n = 2x_n + 2y_n + x_{n-1} + 2y_{n-1} = 2x_n + x_{n-1} + 2(y_n + y_{n-1}).$$

Скориставшись рівністю (13), отримаємо

$$x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1} + 2(x_n - x_{n-1}) = 4x_n - x_{n-1}.$$

Аналогічно з рівностей (10), (11) маємо:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_n + 2y_n = 2x_{n-1} + 3y_{n-1} + 2y_n = 2x_{n-1} + 4y_{n-1} - 4y_{n-1} + 3y_{n-1} + 2y_n = \\ &= 2(x_{n-1} + 2y_{n-1}) + 2y_n - y_{n-1} = 4y_n - y_{n-1}. \end{aligned}$$

Нескладно побачити, що z_{n+1} також виражається рекурентно:

$$z_{n+1} = 2x_n + 4y_n = 8x_n - 2x_{n-1} + 16y_n - 4y_{n-1} =$$

$$= 4 \cdot (2x_n + 4y_n) - (2x_{n-1} + 4y_{n-1}) = 4z_n - z_{n-1}.$$

Таким чином, отримано зворотні послідовності виду

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n \quad (14)$$

з різними початковими членами u_0 та u_1 .

Від рекурентного задання послідовності $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ перейдемо до аналітичного. Відшукаємо формулу загального члена. Рівняння (14) є лінійним різницевим другого порядку, розв'язки якого будемо шукати серед показникових функцій виду $u_n = \lambda^n$. Зробивши підстановку, отримаємо

$$\lambda^{n+2} - 4\lambda^{n+1} + \lambda^n = 0,$$

скоротивши на λ^n , отримаємо рівняння

$$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0,$$

яке є *характеристичним* для різницевого рівняння (14). Воно має два дійсні корені $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$. З теорії різницевих рівнянь відомо, що загальним розв'язком рівняння (14) є функція

$$u_n = C_1(2 + \sqrt{3})^n + C_2(2 - \sqrt{3})^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

Підставивши в останню рівність початкові умови $\begin{cases} u_0 \equiv z_0 = 0, \\ u_1 \equiv z_1 = 2, \end{cases}$ отримаємо коефі-

цієнти $C_1^z = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $C_2^z = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Аналогічно, підставивши у рівність (15) умови $\begin{cases} x_0 = 1, \\ x_1 = 2 \end{cases}$

і $\begin{cases} y_0 = 0, \\ y_1 = 1, \end{cases}$ отримаємо $C_1^x = C_2^x = \frac{1}{2}$ і $C_1^y = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, $C_2^y = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ відповідно.

Отже, шукані функції мають вигляд:

$$x_n = \frac{1}{2} \left((2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n \right), \quad (16)$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left((2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n \right), \quad (17)$$

$$z_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \left((2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n \right). \quad (18)$$

Для знаходження міри Лебега даної множини знайдемо міру її доповнення, тобто обчислимо суму довжин усіх суміжних з E_q інтервалів:

$$\begin{aligned} \lambda(\overline{E}_q) &= \sum_{n=1}^{\infty} z_n d_{2n} = \\ &= \frac{a_2 - q(a_1 + 2a_2)}{\sqrt{3}(1-q)} \sum_{n=1}^{\infty} \left((2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n \right) q^{n-1} = \end{aligned}$$

$$= \frac{a_2 - q(a_1 + 2a_2)}{\sqrt{3}(1 - q)} \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{1 - 2q - \sqrt{3}q} - \frac{2 - \sqrt{3}}{1 - 2q + \sqrt{3}q} \right) = \frac{a_2 - q(a_1 + 2a_2)}{1 - q} \left(\frac{2}{1 - 4q + q^2} \right).$$

Підставивши значення $q = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}$, отримаємо: $\lambda(\overline{E}_q) = \frac{(a_1 + a_2)^2}{2a_2} = |E_q|$. Таким чином, міра доповнення множини дорівнює її діаметру. Отже, $\lambda(E_q) = 0$.

Позначимо через \mathcal{A}_n сімейство всіх відрізків $\square_{c_1 \dots c_{2n-2} ab}$ та $\Delta_{c_1 \dots c_{2n-2} cc}$ рангу $2n$, тобто,

$$\mathcal{A}_n = \left\{ \square_{c_1 \dots c_{2n-2} ab} \wedge \Delta_{c_1 \dots c_{2n-2} cc}, c_j \in \{0, 1\}, j = 1, 2, \dots, 2n - 2 \right\},$$

а через \mathcal{A} — сімейство всіх можливих таких відрізків, тобто

$$\mathcal{A} = \left\{ \square_{c_1 \dots c_{2n-2} ab} \wedge \Delta_{c_1 \dots c_{2n-2} cc}, n \in \mathbb{N}, c_j \in \{0, 1\}, j = 1, 2, \dots, 2n - 2 \right\}.$$

Легко бачити, що система \mathcal{A}_n покриває множини E_q скінченною кількістю відрізків, які між собою не перетинаються. Для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича множини E_q розглядатимемо її покриття лише відрізками з сімейства \mathcal{A} . Кількість всіх відрізків множини \mathcal{A}_n виражається за формулами (16) та (17), а довжини відповідних відрізків становлять

$$|\Delta_{c_1 \dots c_{2n-2} cc}| = r_{2n} = \frac{(a_1 + a_2)^2}{2a_2} q^n,$$

$$|\square_{c_1 \dots c_{2n-2} ab}| = 2r_{2n} - r_{2n+2} = \frac{(a_1 + 3a_2)(a_1 + a_2)}{2a_2} q^n \equiv \varepsilon_n.$$

Таким чином, для всіх $n \in \mathbb{N}$ має місце

$$\begin{aligned} m_{\varepsilon_n}^\alpha(E_q) &\leq x_n \cdot |\square_{c_1 \dots c_{2n-2} ab}|^\alpha + y_n \cdot |\Delta_{c_1 \dots c_{2n-2} ii}|^\alpha = \\ &= \frac{1}{2} \left((2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n \right) \left(\frac{(a_1 + a_2)^2}{2a_2} q^n \right)^\alpha + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{3}} \left((2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n \right) \left(\frac{(a_1 + 3a_2)(a_1 + a_2)}{2a_2} q^n \right)^\alpha = \\ &= \frac{1}{2} (2 + \sqrt{3})^n (A_1 q^n)^\alpha + \frac{1}{2} (2 - \sqrt{3})^n (A_1 q^n)^\alpha + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{3}} (2 + \sqrt{3})^n (A_2 q^n)^\alpha - \frac{1}{2\sqrt{3}} (2 - \sqrt{3})^n (A_2 q^n)^\alpha = \\ &= (2 + \sqrt{3})^n \left(\frac{1}{2} (A_1 q^n)^\alpha + \frac{1}{2\sqrt{3}} (A_2 q^n)^\alpha \right) + (2 - \sqrt{3})^n \left(\frac{1}{2} (A_1 q^n)^\alpha - \frac{1}{2\sqrt{3}} (A_2 q^n)^\alpha \right) = \\ &= (2 + \sqrt{3})^n q^{\alpha n} \left(\frac{A_1^\alpha}{2} + \frac{A_2^\alpha}{2\sqrt{3}} \right) + (2 - \sqrt{3})^n q^{\alpha n} \left(\frac{A_1^\alpha}{2} - \frac{A_2^\alpha}{2\sqrt{3}} \right) = \\ &= B_1 \left((2 + \sqrt{3}) q^\alpha \right)^n + B_2 \left((2 - \sqrt{3}) q^\alpha \right)^n = B_1 \left(1 + \frac{B_2}{B_1} (2 - \sqrt{3})^{2n} \right) \cdot \left((2 + \sqrt{3}) q^\alpha \right)^n, \end{aligned}$$

де $A_1 = \frac{(a_1+a_2)^2}{2a_2}$, $A_2 = \frac{(a_1+3a_2)(a_1+a_2)}{2a_2}$, $B_1 \equiv B_1(\alpha) = \frac{A_1^\alpha}{2} + \frac{A_2^\alpha}{2\sqrt{3}}$, $B_2 \equiv B_2(\alpha) = \frac{A_1^\alpha}{2} - \frac{A_2^\alpha}{2\sqrt{3}}$.

Отже,

$$H^\alpha(E_q) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(B_1 \left(1 + \frac{B_2}{B_1} (2 - \sqrt{3})^{2n} \right) \cdot \left((2 + \sqrt{3})q^\alpha \right)^n \right) = B_1 \lim_{n \rightarrow \infty} \left((2 + \sqrt{3})q^\alpha \right)^n.$$

Якщо $(2 + \sqrt{3})q^\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha > \log_q(2 - \sqrt{3}) \equiv \alpha_0$, то $H^\alpha(E_q) = 0$. А тому $H^\alpha(E_q) = 0$ для всіх $\alpha > \alpha_0$. Таким чином,

$$H^{\alpha_0}(E_q) \leq B_1(\alpha_0) = \frac{A_1^{\alpha_0}}{2} + \frac{A_2^{\alpha_0}}{2\sqrt{3}} \quad \text{і} \quad \alpha_0(E_q) \leq \alpha_0 = \log_{\frac{a_1+a_2}{a_1-a_2}}(2 + \sqrt{3}).$$

Доведемо тепер нерівність $\alpha_0(E_q) \geq \alpha_0$. Для цього покажемо, що $H^{\alpha_0}(E_q) \geq C > 0$, де C – деяка константа. Оскільки множина E_q – компактна, то для знаходження величини $m_\varepsilon^\alpha(E_q)$ достатньо розглядати її скінченні ε -покриття $\{E_k\}$ відрізками $E_i = [a_i, b_i]$. І нехай

$$m_\varepsilon^\alpha(E_q) \equiv \sum_{i=1}^k |E_i|^\alpha.$$

Для кожної множини E_i з даного покриття існує номер n_i рангу відрізка із \mathcal{A}_{n_i} такий, що

$$\min\{|\Delta_{c_1 \dots c_{2(n_i-1)}cc}|, |\square_{c_1 \dots c_{2(n_i-1)}ab}|\} = \frac{(a_1 + a_2)^2}{2a_2} q^{n_i} \leq |E_i| < |\square_{c_1 \dots c_{2(n_i-2)}ab}| = \varepsilon_{n_i-1} < \varepsilon.$$

Піднесемо до степеня $\alpha_0 = \log_q(2 - \sqrt{3})$ і запишемо систему для кожного E_i :

$$\begin{cases} \left(\frac{(a_1+a_2)^2}{2a_2} q^{n_1} \right)^{\alpha_0} = A_1^{\alpha_0} (2 - \sqrt{3})^{n_1} \leq |E_1|^{\alpha_0}, \\ A_1^{\alpha_0} (2 - \sqrt{3})^{n_2} \leq |E_2|^{\alpha_0}, \\ \dots \\ A_1^{\alpha_0} (2 - \sqrt{3})^{n_k} \leq |E_k|^{\alpha_0}. \end{cases}$$

Підсумувавши по k , отримаємо

$$\left(\frac{(a_1 + a_2)^2}{2a_2} \right)^{\alpha_0} \cdot \sum_{i=1}^k (2 - \sqrt{3})^{n_i} \leq \sum_{i=1}^k |E_i|^{\alpha_0} = m_\varepsilon^{\alpha_0}(E_q). \quad (19)$$

Оскільки $|E_i| < |\square_{c_1 \dots c_{2(n_i-2)}ab}|$ і довжини циліндричних відрізків $\Delta_{c_1 \dots c_{2(n_i-1)}cc}$ менші за довжини інтервалів $\delta_{c_1 \dots c_{2n_i-3}i_{2(n_i-1)}}$ при $\frac{a_2}{a_1} > \frac{1}{\sqrt{3}}$ (не складно показати), а множина $\square'_{c_1 \dots c_{2(n_i-2)}ab}$, згідно (9), належить об'єднанню *трьох* відрізків виду $\Delta_{c_1 \dots c_{2(n_i-1)}cc}$ та *двох* відрізків виду $\square_{c_1 \dots c_{2(n_i-1)}ab}$, то кожний відрізок E_i може мати спільні точки не більше, як з *п'ятьма* відрізками рангу $2n_i$, які належать сім'ї \mathcal{A}_{n_i} .

Три відрізки виду $\Delta_{c_1 \dots c_{2(n_i-1)}cc}$ разом з двома відрізками виду $\square_{c_1 \dots c_{2(n_i-1)}ab}$ містять 12 відрізків виду $\Delta_{c_1 \dots c_{2n_i}cc}$ і 7 відрізків виду $\square_{c_1 \dots c_{2n_i}ab}$, тому відрізків рангу $2(n_i + 1)$ із сім'ї \mathcal{A}_{n_i+1} , з якими може мати спільні точки E_i , не більше 19.

Враховуючи формули (8), (9), (10), (11), встановлюємо, що кількість відрізків f_m рангу $2j = 2(n_i + m)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) з сім'ї \mathcal{A}_{n_i+m} , з якими може мати спільні точки відрізок E_i визначається також зворотною послідовністю

$$f_{m+2} = 4f_{m+1} - f_m, \quad \text{де } f_0 = 5, f_1 = 19.$$

Шляхом аналогічних, як при виведенні формул (15), (16), (17), (18) міркувань, встановлюємо, що

$$\begin{aligned} f_m &\equiv f_{n_i}(j) = \frac{9 + 5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2 + \sqrt{3})^m - \frac{9 - 5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2 - \sqrt{3})^m = \\ &= \frac{9 + 5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2 + \sqrt{3})^{j-n_i} - \frac{9 - 5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2 - \sqrt{3})^{j-n_i}, \quad j \geq \max_i \{n_i\}. \end{aligned}$$

Згідно з (16) і (17), запишемо кількість всіх відрізків виду $\Delta_{c_1 \dots c_{2n-2i}}$ та $\square_{c_1 \dots c_{2n-2ab}}$ довільного рангу $2j$:

$$x_j + y_j = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}}(2 + \sqrt{3})^j - \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}}(2 - \sqrt{3})^j.$$

Ця сума не перевищує суми $\sum_{i=1}^k f_{n_i}(j)$, оскільки кожен відрізок E_i покриття $\{E_k\}$ має спільні точки принаймні з одним відрізком рангу $2j$ із покриття \mathcal{A}_{n_i} . Тому має місце нерівність

$$\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}}(2 + \sqrt{3})^j + \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}}(2 - \sqrt{3})^j \leq \sum_{i=1}^k \left(\frac{9 + 5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2 + \sqrt{3})^{j-n_i} - \frac{9 - 5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2 - \sqrt{3})^{j-n_i} \right),$$

що рівносильно

$$\frac{\sqrt{3} + 1}{9 + 5\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3} - 1}{9 + 5\sqrt{3}} \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \right)^j \leq \sum_{i=1}^k (2 - \sqrt{3})^{n_i} - \frac{9 - 5\sqrt{3}}{9 + 5\sqrt{3}} \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \right)^j \cdot \sum_{i=1}^k (2 + \sqrt{3})^{n_i}$$

або

$$\frac{\sqrt{3} + 1}{9 + 5\sqrt{3}} + \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \right)^j \cdot \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{9 + 5\sqrt{3}} + \frac{9 - 5\sqrt{3}}{9 + 5\sqrt{3}} \sum_{i=1}^k (2 + \sqrt{3})^{n_i} \right) \leq \sum_{i=1}^k (2 - \sqrt{3})^{n_i}.$$

Використовуючи останню нерівність, оцінимо ліву частину нерівності (19):

$$A_1^{\alpha_0} \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{9 + 5\sqrt{3}} + A_1^{\alpha_0} \cdot \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \right)^j \cdot \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{9 + 5\sqrt{3}} + \frac{9 - 5\sqrt{3}}{9 + 5\sqrt{3}} \sum_{i=1}^k (2 + \sqrt{3})^{n_i} \right) \leq m_\varepsilon^\alpha(E_q)$$

Перейшовши до границі при $j \rightarrow \infty$, отримаємо

$$0 < \frac{\sqrt{3} + 1}{9 + 5\sqrt{3}} \left(\frac{(a_1 + a_2)^2}{2a_2} \right)^{\alpha_0} \leq m_\varepsilon^{\alpha_0}(E_q).$$

Таким чином, для довільного ε -покриття $\{E_k\}$ множини E_q відрізками E_i , величина $m_\varepsilon^{\alpha_0}(E_q)$ обмежена знизу константою. Перейшовши до границі ($\varepsilon \rightarrow 0$), отримаємо:

$$\frac{\sqrt{3} + 1}{9 + 5\sqrt{3}} \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m_\varepsilon^{\alpha_0}(E_q) = H^{\alpha_0}(E_q).$$

Отже, $\alpha_0(E_q) \geq \alpha_0$ і тому розмірність Хаусдорфа-Безиковича даної множини дорівнює

$$\alpha_0(E_q) = \log_{\frac{a_1+a_2}{a_1-a_2}}(2 + \sqrt{3}).$$

□

ЛІТЕРАТУРА

- [1] *Albeverio S., Torbin G.* On fine fractal properties of generalized infinite Bernoulli convolutions // *Bull. Sci. Math.* — 2008. — **132**, no. 8. — P. 711–727.
- [2] *Banakh T., Bartoszewicz A., Głab S., Szymonik E.* Algebraic and topological properties of some sets in ℓ_1 // *Colloq. Math.* — 2012. — **129**. — P. 75–85.
- [3] *Falconer K. J.* *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications.* — Chichester: Wiley, 1990. — 290 p.
- [4] *Ferens F.* On the range of purely atomic probability measures // *Colloq. Math.* — 1984. — **77**. — P. 261–263.
- [5] *Guthrie J. A., Nymann J. E.* The topological structure of the set of subsums of an infinite series // *Studia Math.* — 1988. — **55**, no. 2. — P. 323–327.
- [6] *Hornich H.* Über beliebige Teilsummen absolut konvergenter Reihen // *Studia Math. Phys.* — 1941. — **49**. — P. 316–320.
- [7] *Jones R.* Achievement Sets of Sequences // *Amer. Math. Monthly* — 2011. — **118**. — P. 508–521.
- [8] *Takeya S.* On the partial sums of an infinite series // *Tôhoku Sci Rep.* — 1914. — **3**, no. 4. — P. 159–163.
- [9] *Menon P. K.* On a class of perfect sets // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1948. — **54**. — P. 706–711.
- [10] *Nymann J. E., Sáenz R. A.* On the paper of Guthrie and Nymann on subsums of infinite series // *Colloq. Math.* — 2000. — **83**. — P. 323–327.
- [11] *Peres Y., Solomyak B.* Self-similar measures and intersections of Cantor sets // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1998. — **350**, no. 10. — P. 4065–4087.
- [12] *Pratsiovytyi M. V., Feshchenko O. Yu.* Topological, metric and fractal properties of probability distributions on the set of incomplete sums of positive series // *Theory of Stochastic Processes.* — 2007. — **13** (29), №1-2. — P. 205–224.
- [13] *Šalát T.* Absolut konvergente Reihen und Hausdorffsche Mass // *Чехосл. мат. ж.* — 1959. — **9** (84). — P. 372–389.
- [14] *Solomyak B.* Measure and dimension for some fractal families // *Proc. Camb. Phil. Soc.* — 1998. — **124**. — P. 531–548.
- [15] *Solomyak B.* On the random series $\sum \pm \lambda^n$ (an Erdős problem) // *Annals of Mathematics.* — 1995. — **142**. — P. 611–625.
- [16] *Барановський О. М., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Ряди Остроградського–Серпінського–Пірса та їх застосування. — Київ: Наук. думка, 2013. — 288с.

- [17] *Вайнштейн А. Д., Шапиро Б. З.* О строении множества \bar{a} -представимых чисел // Изв. вузов. Матем. — № 5, 1980. — С. 8–11.
- [18] *Гончаренко Я. В.* Згортки розподілів сум випадкових рядів спеціального виду // Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — № 4, 2003. — С. 216–232.
- [19] *Гончаренко Я. В., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Тополого-метричні і фрактальні властивості множини неповних сум знакододатного ряду та розподілів на ній // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2005, № 6. — С. 210–224.
- [20] *Гончаренко Я. В., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Фрактальні властивості деяких згорток Бернуллі // Теор. ймовірност. матем. статист. — 2008. — 79. — С. 34–49.
- [21] *Гончаренко Я. В., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Тополого-метричні і фрактальні властивості множини неповних сум знакододатного ряду та розподілів на ній // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2005, № 6. — С. 210–224.
- [22] *Корсунь Н. О., Працьовитий М. В.* Про множину неповних сум знакододатних рядів з однією умовою однорідності та узагальнення двійкового зображення чисел // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2009, № 10. — С. 28–39.
- [23] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296с.
- [24] *Працьовитий М. В., Савченко І. О.* Фрактальні властивості лінійних множин однієї трипараметричної сім'ї // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2013, № 14. — С. 227–239.
- [25] *Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Один клас випадкових величин типу Джессена-Вінгнера // Доп. НАН України. — 1998. — №4. — С. 48-54.
- [26] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук. думка, 1992. — 208с.
- [27] *Шалат Т.* О мере Хаусдорфа линейных множеств // Чехословацкий математический журнал, Прага. — 1961. — 11 (86), — С. 24-56.